نام درس: آمار احتمال ۲

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ **تشریحی:** ۵

رشته تحصیلی و کُد درس: علوم کامپیوتر ۱۱۱۷۰۷۸

زمان آزمون: تستی: ۶۰ **تشریحی:** ۶۰ **دقیقه**

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ◉

کُد سری سؤال: دو (۲)

استفاده از: ماشین حساب **مجاز است.**

امام علی(ع): برتری مردم به یکدیگر، به دانش‌ها و خردهاست؛ نه به ثروت‌ها و تبارها.

۱. اگر x دارای توزیع نمایی به صورت $f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0\ , & \text{سایر جاها} \end{cases}$ باشد، چگالی احتمال متغیر تصادفی $Y=\sqrt{X}$ عبارت است از:

الف. $g(y)=\begin{cases} 2e^{-y^2}, & y>0 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$

ب. $g(y)=\begin{cases} 2ye^{-y^2}, & y>0 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$

ج. $g(y)=\begin{cases} 2ye^{y^2}, & y>0 \\ 0 & \text{سایر} \end{cases}$

د. $g(y)=\begin{cases} ye^{-y^2}, & y>0 \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$

۲. اگر متغیر تصادفی پیوسته X با $Y=-X$ هم توزیع باشد آن‌گاه:

الف. $F_X(x)<1-F_X(x)$

ب. X باید دارای توزیع $N(0,1)$ باشد.

ج. $F_X(x)<1-F_X(-x)$

د. $F_X(x)+F_X(-x)=1$

۳. متغیر تصادفی X با چگالی احتمال: $f(x)=4x^3, 0<x<1$ مفروض است. در این صورت چگالی احتمال $y=-2\ln(X^4)$ عبارت است از:

الف. نمایی با میانگین یک

ب. کای۲، با ۲ درجه آزادی

ج. $N(0,1)$

د. گاما با پارامترهای ۲ و ۳

۴. اگر X_i و $(i=1,2,3)$, $y=\min(X_1,X_2,X_3)$ ها مستقل از یکدیگر بوده و دارای توزیع نمایی با میانگین ۲ باشند. آن‌گاه $E(y)$ برابر است با:

الف. ۶

ب. $\frac{3}{2}$

ج. $\frac{2}{3}$

د. $\frac{1}{2}$

۵. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی به اندازه ۱۶ از یک توزیع نرمال با میانگین μ باشد در این صورت توزیع احتمال:

$$U = \frac{16(\overline{X}-\mu)^2}{\sum_{i=1}^{16}(X_i-\overline{X})^2}$$

الف. $F(1,14)$ ب. $t_{(15)}$ ج. $F(1,15)$ د. $t_{(14)}$

۶. فرض کنید X_1, X_2 دو متغیر تصادفی مستقل، نرمال استاندارد باشند. در این صورت توزیع: $y = \frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}$ عبارت است از:

الف. $\chi^2_{(1)}$ ب. $t_{(2)}$ ج. $F(1,1)$ د. $\chi^2_{(2)}$

۷. برای نمونه‌ای به اندازه n از جامعه‌ای نرمال با واریانس σ^2، واریانس توزیع نمونه‌گیری، S^2 عبارت است از:

الف. σ^2 ب. $\frac{\sigma^2}{n-1}$ ج. $\frac{2\sigma^4}{n-1}$ د. $\frac{2\sigma^2}{n-1}$

۸. بر اساس نمونه‌ای مرکب از ۲ مشاهده، مستقل، از یک توزیع دو برآورد کننده نااریب μ به صورت:

$T_1 = 0/4X_1 + 0/6X_2$ و $T_2 = aX_1 + bX_2$ را در نظر می‌گیریم. مقادیر a, b برای این که کارایی T_1 نسبت به T_2 برابر $\frac{125}{117}$ شود، عبارتند از:

الف. $a=\frac{1}{3}, b=\frac{2}{3}$ ب. $a=\frac{1}{4}, b=\frac{3}{4}$ ج. $a=\frac{5}{6}, b=\frac{1}{6}$ د. $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{2}$

۹. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی n تایی از توزیع نرمال با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد که در آن μ معلوم و σ^2 نامعلوم است، کدام‌یک از متغیرهای تصادفی زیر یک آماره نام دارد؟

الف. $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/S$ ب. $\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)/\sigma$ ج. $(n-1)S^2/\sigma^2$ د. $\overline{X}^2+\sigma^2$

۱۰. اگر $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نمونه‌ای تصادفی از جامعه یکنواخت در فاصله $(0,\beta)$ باشد، آن‌گاه برآوردکننده‌ای نااریب برای β عبارت است از: (Y_n : n امین آماره ترتیبی)

الف. Y_n ب. $\frac{n}{n+1}Y_n$ ج. $\frac{n+1}{n}Y_n$ د. $\frac{Y_n}{n+1}$

نام درس: آمار احتمال ۲
رشته تحصیلی و کُد درس: علوم کامپیوتر ۱۱۱۷۰۷۸
کُد سری سؤال: دو (۲)
تعداد سؤالات: **تستی:** ۲۰ **تشریحی:** ۵
زمان آزمون: **تستی:** ۶۰ **تشریحی:** ۶۰ **دقیقه**
آزمون نمره منفی دارد ○ **ندارد** ◉
استفاده از: ماشین حساب **مجاز است.**

۱۱. تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی X عبارت است از:

$$f(x)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x}, & \theta>0\,,\,x>0\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$$

با استفاده از یک نمونه تصادفی برآوردگر گشتاوری θ عبارت است از:

الف. $\overline{X}$ ب. $e^{\overline{X}}$ ج. $\sqrt{\overline{X}}$ د. $\frac{1}{\overline{X}}$

۱۲. فرض کنید. $X_1,X_2,...,X_n$ نمونه‌ای تصادفی n تایی از توزیعی با تابع چگالی احتمال زیر باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{1-\theta^2}.x & \theta<x<1\,,\ \theta>0\\ 0 & \text{سایر}\end{cases}$$

در این صورت برآوردگر درستنمایی ماکسیمم $\theta(=MLE)$ عبارت است از:

الف. $(\prod_{i=1}^{n} X_i)^{\frac{1}{n}}$ ب. $Y_n=\max(X_1,...,X_n)$

ج. $Y_1=\min(X_1,...,X_n)$ د. $\frac{Y_1+Y_n}{2}$

۱۳. نمونه تصادفی ۱۰۰ تایی با میانگین $\overline{X}$ از توزیعی دلخواه با میانگین μ و واریانس ۴ در نظر می‌گیریم . اگر فاصله $(\overline{x}-0/8\,,\,\overline{x}+0/8)$ یک فاصله اطمینان برای پارامتر μ باشد، ضریب اطمینان تقریباً برابر است با:

الف. ۰ ب. $\frac{1}{2}$ ج. ۱ د. $\frac{1}{4}$

۱۴. با فرض نرمال و مستقل بودن، توزیع‌هائی که ۲ نمونه تصادفی ۳۲ تایی از آن‌ها، انتخاب شده است، نتایج زیر حاصل شده است.

$1)\,n_1=32,\overline{x}_1=8\,,\,S_1^2=4/5$

$2)\,n_2=32,\overline{x}_2=6/5\,,\,S_2^2=2$

با فرض $\sigma_1=\sigma_2$ ، یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای تفاضل میانگین‌ها، یعنی: $\mu_1-\mu_2$ عبارت است از:

الف. $1/5\pm0/45t_{(60,\%5)}$ ب. $1/5\pm0/45t_{(62,\%25)}$

ج. $1/5\pm0/45\,t_{(60,\%25)}$ د. $1/5\pm0/45t_{(62,\%5)}$

۱۵. متغیر تصادفی : $X \sim N(0, \sigma^2)$ مفروض است و نمونه تصادفی X_1 , X_2 را در نظر می‌گیریم و می‌خواهیم به ازای $\alpha = 0/05$ ، فرض : $H_0 : \sigma \geq 1$ را در برابر $H_1 : \sigma < 1$ انجام دهیم. اگر مناسب‌ترین آماره آزمون را در این مسأله بکار بریم ناحیه بحرانی ، کدام‌یک از موارد زیر است؟ $\chi^2_{0/05} = 3/841$, $\chi^2_{0/95} = 0/00393$

الف. $[0, 7]$ ب. $(-\infty, 0/1]$ ج. $[0, 5/99]$ د. $[0, 0/06]$

۱۶. فرض می‌کنیم مدل احتمالی متغیر تصادفی X به صورت زیر باشد:

X	۱	۲	۳
$P(X=x)$	$\frac{1-\theta}{3}$	$\frac{\theta}{3}$	$\frac{2}{3}$

بر اساس یک مشاهده می‌خواهیم فرض $H_0 : \theta = \frac{1}{3}$ را در برابر $H_1 : \theta = \frac{2}{3}$ آزمون کنیم،اگر ناحیه رد به صورت $x = 2, 3$ باشد احتمال خطای نوع دوم آزمون برابر است با:

الف. $\frac{1}{3}$ ب. $\frac{2}{3}$ ج. $\frac{1}{9}$ د. $\frac{5}{9}$

۱۷. یک نمونه تصادفی ۳۲ تایی از یک جامعه نرمال دارای واریانس نمونه‌ای، برابر ۱۰/۲۴ شده است. یک فاصله اطمینان ۹۵ درصد برای σ عبارت است از:

$(Z_{0/05} = 1/64 , \chi^2_{0/975}(31) = 16/79 , \chi^2_{0/025}(31) = 46/979)$

$(Z_{0/025} = 1/96)$

الف. $(2/6 , 4/35)$ ب. $(2/57 , 4/35)$ ج. $(2/6 , 4/24)$ د. $(2/57 , 4/24)$

۱۸. از جامعه‌ای نرمال چند نمونه بگیریم تا بتوانیم با ۹۵ درصد اطمینان بگوئیم میانگین جامعه در فاصله (۴ و ۲) قراردارد (با فرض این که واریانس جامعه ۴و $Z_{0/025} = 2$ باشد)

الف. ۲ ب. ۴ ج. ۱۶ د. ۲۵

۱۹. خطای نوع اول در آزمون فرض‌ها عبارت است از:

الف. قبول بنا حق فرض H_1 ب. قبول بنا حق فرض H_0 ج. رد بنا حق فرض H_1 د. رد بنا حق فرض H_0

۲۰. در یک نمونه‌گیری تصادفی ساده برای تعیین برآورد نسبت یک مشخصه، نمونه‌ای تصادفی به حجم ۲۰ ، انتخاب کرده‌ایم . اگر حجم جامعه ۲۰۰ و نسبت مشخصه، در نمونه، ۰/۴ باشد، برآورد واریانس برآورد کننده نسبت برابر است با:

الف. ۰/۰۱۲ ب. ۰/۵ ج. $\frac{108}{9500}$ د. $\frac{9500}{108}$

نام درس: آمار احتمال ۲
رشته تحصیلی و کُد درس: علوم کامپیوتر ۱۱۱۷۰۷۸
کُد سری سؤال: دو (۲)
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ **تشریحی:** ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ **تشریحی:** ۶۰ **دقیقه**
آزمون نمره منفی دارد○ ندارد◉
استفاده از: ماشین حساب **مجاز است.**

سؤالات تشریحی

۱. فرض کنید X_1 , X_2 متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع نرمال استاندارد باشند. و $y_1 = X_1 + X_2$, $y_2 = \frac{X_1}{X_2}$ ، مطلوب است

تعیین چگالی توأم y_1 , y_2 و حاشیه‌ای y_2 ۱/۷۵نمره

۲. فرض کنید $X_1 , X_2 ,..., X_n$ ، نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با چگالی زیر باشد:

$$f(x,k) = \frac{\theta k^{\theta}}{x^{\theta+1}} \ , x \geq k \ , \theta > 0$$

الف. آماره بسنده‌ای برای θ بیابید.

ب. برآورد درستنمایی ماکزیمم $(MLE =) \theta$ را بیابید. ۱/۷۵نمره

۳. فرض کنید $X_1 , X_2 ,..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی از توزیع $\mathrm{P}(\mu)$ (= پواسن با پارامتر $\lambda = \mu$) باشد. بهترین ناحیه بحرانی آزمون فرض $H_0 : \mu = \mu_0$ را در برابر $H_1 : \mu = \mu_1$ (با فرض $\mu_1 > \mu_0$) بر اساس لم نیمن – پیرسن بیابید. ۱/۷۵نمره

۴. فرض کنید. $X_1 ,..., X_n$ نمونه‌ای تصادفی n تایی از توزیع $U(0, \theta)$ (= یکنواخت) باشد اگر

$T_1 = 2\overline{X}$, $T_2 = \frac{n+1}{n} y_n$ (= y_n ماکسیمم ($X_1 ,..., X_n$)) باشد ثابت کنید: از بین برآوردگرهای T_1 , T_2 کدام‌یک

مناسب‌ترند؟ ۱/۷۵نمره

۵. ازنمونه‌های تصادفی مستقل به اندازه های $n_1 = 16$, $n_2 = 21$،مقادیر $S_1^2 = 0/6$, $S_2^2 = 0/2$ به دست آمده است. یک فاصله اطمینان ۹۵٪ برای نسبت واریانس‌ها بیابید. سپس، بر اساس آن، نتیجه بگیرید که آیا دو جامعه دارای واریانس برابرند یا خیر؟ (با ذکر دلایل) ۱نمره

$\mathrm{F}_{0/95}(15,20) = 2/2$, $\mathrm{F}_{0/95}(20 , 15) = 2/33$