

نام درس: آمار ریاضی ۱
رشته تحصیلی / کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۳۲) - آمار ریاضی (جبرانی ارشد : ۱۱۱۷۰۳۲)
ریاضی (محض و کاربردی : ۱۱۱۷۰۲۲)
کد سری سؤال: یک (۱)
استفاده از ماشین حساب مجاز است.
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تنها با یاد اوست که دل‌ها آرام می‌گیرد.

۱. هرگاه $X|Y$ دارای توزیع پواسون با پارامتر Y و $Y \sim \Gamma(1,1)$ باشد $E(X)$ برابر است با:

- الف. $\frac{5}{8}$ ب. ۱ ج. $\frac{1}{4}$ د. $\frac{1}{2}$

۲. توزیع توام دو متغیر Y, X به صورت $f(x, y) = \begin{cases} a^x e^{-a(x+y)} & x > 0, y > 0 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ است. میانگین $X+Y$ برابر

است با:

- الف. $\frac{1}{a}$ ب. $\frac{1}{a^2}$ ج. $\frac{2}{a}$ د. $\frac{1}{2a}$

۳. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی مستقل و هریک با توزیع نرمال استاندارد هستند، توزیع $\left|\frac{X}{Y}\right|^2$ کدام است؟

- الف. t_2 ب. $F_{1,1}$ ج. $F_{1,2}$ د. $F_{2,1}$

۴. اگر X و X^2 هم توزیع باشند، X دارای کدام توزیع زیر است؟

- الف. هندسی ب. پواسون با پارامتر ۱
ج. یکنواخت بر $(0, 1)$ د. برنولی

۵. اگر $T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ برآورد θ در توزیع پواسون باشد، $MSE(T)$ کدام است؟

- الف. $\frac{\theta}{n}$ ب. θ ج. $\frac{n}{\theta}$ د. $\frac{\theta^2}{n}$

۶. متغیر تصادفی X دارای توزیع پیوسته و صعودی $F(x)$ است فرض کنید: $Y = [F(X)]^2$ حال واریانس متغیر تصادفی Y کدام است؟

- الف. $\frac{2}{\sqrt{45}}$ ب. $\frac{2}{45}$ ج. $\frac{4}{45}$ د. $\frac{1}{3}$

نام درس: آمار ریاضی ۱
رشته تحصیلی / کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۳۲) - آمار ریاضی (جبرانی ارشد : ۱۱۱۷۰۳۲)
ریاضی (محض و کاربردی : ۱۱۱۷۰۲۲)
کد سری سؤال: یک (۱)
استفاده از: ماشین حساب
مجاز است.

۷. براساس مشاهدات ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، برآورد ماکسیمم درستنمایی θ در توزیعی با چگالی $f(x, \theta) = \frac{1}{2} e^{-|x-\theta|}$ کدام است؟

الف. ۲- ب. ۱/۵ ج. ۲ د. ۳

۸. کدام تابع زیر یک تابع مولد گشتاور است؟

الف. $\frac{1}{3}(e^{2t} + e^{-t})$ ب. $\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$
ج. $\frac{1}{3}(e^{2t} + e^{-(t-1)})$ د. $\frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-(t-1)}$

۹. فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه ای تصادفی از توزیع p باشد
 $f_p(x) = \begin{cases} p(1-p) & x=1, 2, \dots \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ ، $0 \leq p \leq 1$

برآورد کننده p بر اساس روش ماکزیمم درستنمایی برابر است با:

الف. \bar{X} ب. $\frac{2\bar{X}}{n+1}$ ج. $\frac{n+1}{\bar{X}}$ د. $\frac{1}{\bar{X}}$

۱۰. چگالی توزیع مربع کای با n درجه آزادی کدام است؟

الف. $\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ ، $x > 0$ ب. $\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{x}{2}}$ ، $x > 0$
ج. $\frac{1}{2^n \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}}$ ، $x > 0$ د. $\frac{1}{2^n \Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$ ، $x > 0$

۱۱. اگر $\{X_n\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی مستقل هم توزیع با میانگین μ باشد و قرار دهیم $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ آنگاه

$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{n(\mu - \epsilon) \leq S_n \leq n(\mu + \epsilon)\}$ برابر است با:

الف. صفر ب. یک

ج. مقداری کمتر از یک د. ۹۵٪ از سطح زیر منحنی نرمال استاندارد

۱۲. یک برآورد نااریب برای پارامتر توزیع یکنواخت $(0, \theta)$ براساس یک نمونه n تایی کدام است؟

الف. $\frac{n-1}{n} X_{(1)}$ ب. $\frac{n}{n+1} X_{(n)}$ ج. $\frac{n+1}{n} X_{(n)}$ د. $\frac{n}{n+1} X_{(1)}$

نام درس: آمار ریاضی ۱
رشته تحصیلی / گد درس: آمار (۱۱۱۷۰۳۲) - آمار ریاضی (جبرانی ارشد : ۱۱۱۷۰۳۲)
ریاضی (محض و کاربردی : ۱۱۱۷۰۲۲)
گد سری سؤال: یک (۱)
استفاده از: ماشین حساب
مجاز است.

۱۳. نمونه ای تصادفی از توزیع یکنواخت در بازه (۰ و ۱) و متغیرهای Y_1, Y_2, Y_3 آماره های مرتب این نمونه هستند، مقدار $E(Y_2)$ برابر است با :

- الف. صفر
ب. $\frac{1}{2}$
ج. ۱
د. ۳

۱۴. فرض کنید \bar{X} میانگین یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع پواسن با امید ریاضی μ است. برای μ کدام آماره UMVUE است؟

- الف. \bar{X}^2
ب. $\bar{X}^2 + \bar{X}$
ج. $\bar{X}^2 + \frac{1}{n}\bar{X}$
د. $\bar{X}^2 - \frac{1}{n}\bar{X}$

۱۵. اگر x_1, x_2, \dots, x_n نمونه ای تصادفی از توزیع $N(\mu, \sigma^2)$ باشد، $\bar{X} - X_1$ دارای کدام توزیع است؟

- الف. $N[0, \frac{n-1}{n}\sigma^2]$
ب. $N[0, \frac{n+1}{n}\sigma^2]$
ج. $N[1, \frac{n-1}{n}\sigma^2]$
د. $N[\mu, \frac{n+1}{n}\sigma^2]$

۱۶. اگر x_1, \dots, x_n نمونه ای از توزیع یکنواخت بر $(0, \theta)$ باشد، MLE پارامتر θ کدام است؟

- الف. وجود ندارد.
ب. $\text{Max}\{x_1, \dots, x_n\}$
ج. $\text{Min}\{x_1, \dots, x_n\}$
د. میانه داده ها

۱۷. از توزیع

x	-1	0	1
$P(X = x)$	θ	$1 - 3\theta$	2θ

مشاهدات ۰، ۱، ۰ حاصل شده است. برآورد گشتاوری θ کدام است؟

- الف. $\frac{1}{3}$
ب. $\frac{2}{3}$
ج. $\frac{1}{2}$
د. $\frac{1}{4}$

۱۸. یک آماره کافی برای پارامتر θ در توزیع نمونه ای یکنواخت بر بازه $(-\theta, 0)$ کدام است؟

- الف. $x(1)$
ب. $x(n)$
ج. \bar{X}
د. $-\bar{X}$

نام درس: آمار ریاضی ۱
رشته تحصیلی / کد درس: آمار (۱۱۱۷۰۳۲) - آمار ریاضی (جبرانی ارشد : ۱۱۱۷۰۳۲)
ریاضی (محض و کاربردی : ۱۱۱۷۰۲۲)
کد سری سؤال: یک (۱)
استفاده از: ماشین حساب
مجاز است.

۱۹. مقدار $E(XE(Y|X))$ کدام است ؟

الف. $E(X)$ ب. $E(Y)$ ج. $E(X)E(Y)$ د. $E(XY)$

۲۰. متغیر تصادفی X دارای توزیع احتمال یکنواخت روی بازه $(۱ و ۰)$ است توزیع $Y = -2 \ln X$ کدام است؟

الف. $Y \sim \exp(-2)$ ب. $Y \sim \exp(2)$ ج. $Y \sim U(-2, 0)$ د. $Y \sim U(0, +2)$

سؤالات تشریحی

بارم هر سؤال ۱/۶ نمره می باشد.

۱. تابع چگالی توام دو متغیر تصادفی Y, X عبارت است از

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & 0 < x < \infty, 0 < y < \infty \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

تابع چگالی متغیر تصادفی $T = \frac{X}{Y}$ رابایبید.

۲. T_1 و T_2 دوبرآورد مستقل و ناریب و به ترتیب با واریانس σ_1^2 و σ_2^2 برای پارامتر θ می باشند. به ازای چه مقادیری از a و b

برآورد $aT_1 + bT_2$ ناریب و دارای کمترین واریانس است؟

۳. هرگاه X_1, \dots, X_n نمونه ای تصادفی از چگالی $f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{(x-2)}{\theta}} & x \geq 2, \theta > 0 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$ برآورد ماکزیم درستنمایی

(MLE) پارامتر θ رابایبید.

۴. فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه ای تصادفی از توزیع $f(x; \theta) = \frac{2x}{\theta^2} I_{(0, \theta)}(x)$, $\theta > 0$ باشد، UMVUE برآوردگر برای θ رابایبید.

۵. فرض کنید X_1, \dots, X_n نمونه ای تصادفی از توزیعی با تابع چگالی احتمال $f_\theta(x) = \begin{cases} \theta(1+x)^{-(1+\theta)} & x > 0, \theta > 0 \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$

برآورده کننده ناریب با کمترین واریانس یکنواخت (UMVUE) برای $\frac{1}{\theta}$ رابایبید.