

تعداد سؤال: نسی: ۲۰ تکمیلی: — تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی و تکمیلی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل
رشته تحصیلی-گرایش: ریاضی (محض و کاربردی)

کد درس: ۱۱۱۰۵۱

* دانشجوی گرامی: لطفاً، گزینه ۱ را در قسمت کد سری سؤال برگه پاسخنامه خود، علامت بزنید. بدیهی است، مسئولیت این امر برعهده شما خواهد بود.

**این آزمون نمره منفی ندارد

۱- کدام یک از دستگاههای معادله زیر خود گردان می باشد؟

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad \begin{cases} x_1'(t) = t \\ x_2'(t) = 1 \end{cases} & \text{ب)} \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_2 + 1 \\ x_2'(t) = x_1 \end{cases} & \text{ج)} \quad \begin{cases} x_1'(t) = tx_2 \\ x_2'(t) = x_1 \end{cases} & \text{د)} \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_1 + t \\ x_2'(t) = x_2 - 2t \end{cases} \end{aligned}$$

۲- اگر معادله دیفرانسیل $2x'' + 3x' - 5x = 0$ را به صورت $x' = Ax$ بنویسیم A کدام است؟

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & \text{ب)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & \text{ج)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} & \text{د)} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

۳- شرط لپشتیز برای یگانگی جواب چه نوع شرطی است؟

الف) شرط لازم (ب) شرط لازم و کافی (ج) هیچ رابطه ای ندارند. (د) شرط کافی

۴- برای جواب معادله $u' = u^2 - t$ با مقدار اولیه $u(0) = 1$ $0 < t < 1$ کدام گزینه درست است؟

$$\begin{aligned} \text{الف)} \quad u(t) < t + 1 & \text{ب)} \quad \frac{1}{1-t} < u(t) & \text{ج)} \quad \frac{1}{1-t} < u(t) < 1+t & \text{د)} \quad 1+t < u(t) < \frac{1}{1-t} \end{aligned}$$

۵- کدام گزینه زیر صحیح است؟

الف) ماتریسهای مشابه چند جمله ایهای مشخصه یکسان دارند.

ب) اگر چند جمله ایهای مشخصه یکسان باشند، آنگاه دو ماتریس مشابه می باشند.

ج) دو ماتریس A و B مشابه است هر گاه ماتریس وارون پذیری چون T باشد که $A = BT^{-1}$

د) ماتریسهای مشابه وارون پذیر نیستند.

۶- اگر تابع u روی $[0, t)$ پیوسته و نامنفی باشد و در نامساوی $u(t) \leq t^2 + 1 + \int_0^t 3t^2 u(t) dt$ صدق کند، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

$$\text{الف)} \quad u(t) \leq t^2 + 1 + \exp(t^3) \quad \text{ب)} \quad u(t) \leq (t^2 + 1) \exp(t^2)$$

$$\text{ج)} \quad u(t) \leq (t^2 + 1) \exp(t^3) \quad \text{د)} \quad u(t) \leq (t^2 + 1) \exp 3t$$

۷- کدام یک از توابع زیر وابسته خطی می باشد ؟

$$\text{الف)} \quad e^{-t}, e^{3t} \quad \text{ب)} \quad e^{t+2}, e^{t-3} \quad \text{ج)} \quad \sin t, \cos t \quad \text{د)} \quad e^t, \sin t, \cos t$$

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

تعداد سؤال: ۲۰، تکمیلی: —، تشریحی: ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

زمان آزمون (دقیقه): تستی و تکمیلی: ۶۰، تشریحی: ۶۰

کد درس: ۱۱۱۱۰۵۱

۸- اگر ϕ ماتریس اصلی $x' = A(t)x$ و C یک ماتریس ثابت باشد، کدام گزینه صحیح است؟(الف) هر ماتریس اصلی به صورت ϕC است که C ماتریسی است ثابت و عادی(ب) $C\phi$ یک ماتریس اصلی است(ج) ϕC نمی تواند ماتریس اصلی باشد.(د) اگر منفرد باشد آنگاه ϕC یک ماتریس اصلی است.۹- اگر ϕ یک ماتریس جواب دستگاه $x' = A(t)x$ و ψ یک ماتریس جواب دستگاه الحاقی $x' = -A^T(t)x$ باشد، در این

صورت کدام گزینه صحیح است؟

(الف) ماتریس نامنفرد و ثابتی مانند C موجود است که $\phi C = I$ (ب) همواره $\psi^T \phi = I$ (ج) ماتریس نامنفرد و ثابتی مانند C موجود است که $\psi^T \phi = C$ (د) ماتریس نامنفرد و ثابتی مانند C موجود است که $\psi \phi = C$ ۱۰- شرایط هوروتیز را در مورد چند جمله ای $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ به چه صورت می توان تحویل نمود؟(ب) $a_1a_2 - a_3 > 0$ (الف) $a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, a_3 > 0$ (د) $a_1a_2 - a_3 < 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$ (ج) $a_1a_2 - a_3 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$

۱۱- ماتریس پایدار چه نوع ماتریسی است؟

(الف) قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه آن نامنفی باشد.

(ب) قسمت حقیقی تمام مقادیر ویژه آن منفی باشد.

(ج) قسمت موهومی تمام مقادیر ویژه آن منفی باشد.

(د) قسمت موهومی تمام مقادیر ویژه آن نامنفی باشد.

۱۲- اگر قسمتهای حقیقی تمام مقادیر ویژه A منفی باشند، آنگاه به ازای هر جواب $\chi(t)$ از معادله $\chi' = A\chi$ کدام گزینه

صحیح است؟

(د) $\lim_{t \rightarrow 0} \|\chi(t)\| = \infty$ (ج) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\chi(t)\| = 0$ (ب) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\chi(t)\| = \infty$ (الف) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\chi(t)\| = 1$ ۱۳- اگر تمام جوابهای دستگاه $\chi' = A\chi$ روی $[0, +\infty)$ کراندار باشند، در چه صورت تمام جوابهای دستگاه $B(t)x' = (A + B(t))x$ ماتریس $n \times n$ پیوسته و A ماتریس $n \times n$ ثابت می باشند. روی $[0, +\infty)$ کراندار می باشد؟(ب) $\int_0^\infty \|B(s)\| ds < \infty$ (الف) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|B(t)\| = 0$ (د) $B(t)$ ماتریس ثابت نامنفرد باشد.(ج) A ماتریس منفرد باشد.

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

تعداد سؤال: نسی: ۲۰ تکمیلی: — تشریحی: ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

زمان آزمون (دقیقه): تستی و تکمیلی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

کد درس: ۱۱۱۰۵۱

۱۴- جواب صفر معادله $u' = a(t)u$ مجانباً پایدار است، اگر و تنها اگر:

الف) $\int_{t_0}^t a(s)ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$ (ب) $\int_{t_0}^t a(s)ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$ کراندار باشد.

ج) $\int_{t_0}^t a(s)ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} +\infty$ (د) $\int_{t_0}^t a(s)ds \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

۱۵- تمام جوابهای دستگاه $\chi' = A(t)\chi$ (که در آن ماتریس $n \times n$ و پیوسته بر $[0, +\infty)$ و x یک n - بردار است) پایدارند، اگر و تنها اگر:

الف) مجانباً پایدار باشند. (ب) قوی-پایدار باشند.

ج) کراندار باشند. (د) پایدار باشد.

۱۶- با چه شرطی جوابهای نابدهی $u'' + \varphi(t)u = 0$ نوسانی می باشند؟الف) به ازای هر t $\varphi(t) \geq 0$ (ب) به ازای هر t $\varphi(t) \leq 0$ ج) $\varphi(t)$ پیوسته باشد. (د) به ازای هر t $\varphi(t) \geq m^2 > 0$ (m عدد حقیقی)۱۷- در چه صورت تمام جوابهای $u'' + (1+b(t))u = 0$ برای $x(t)$ روی $[0, +\infty)$ کراندار می باشد.

الف) $|b(t)| < \infty$ (ب) $\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = 0$ (ج) $\int_0^\infty |b(t)|dt < \infty$ (د) $b(t)$ تابع پیوسته است.

۱۸- در مورد معادله $u'' + \frac{1}{\varepsilon t^2}u = 0$ کدام گزینه صحیح است؟

الف) یک معادله نوسانی است. (ب) یک معادله غیر نوسانی است.

ج) تمام جوابهای آن کراندار است. (د) تمام جوابهای آن بی کران است.

۱۹- اگر $u = \varphi(t)$ جوابی از معادله $u' + p(t)u + q(t)u^2 = r(t)$ باشد، جواب دیگر به چه صورت است؟

الف) $u = c\varphi(t)$

ب) $u = \varphi(t) - \frac{1}{t}$

ج) $u = t\varphi(t)$

د) $u = \varphi(t) - \frac{1}{\psi(t)}$ که در آن $\psi(t)$ جوابی از معادله ای به صورت $u' = a(t)u + b(t)$ است.

۲۰- در مورد تابع $u(t, x_1, x_2) = x_1^2(1 + \sin^2 t) + x_2^2(1 + \cos^2 t)$ کدام گزینه صحیح است؟

الف) معین مثبت است. (ب) نیمه معین مثبت است. (ج) کاهنده است. (د) معین مثبت و کاهنده است.

نام درس: نظریه معادلات دیفرانسیل

تعداد سؤال: نسی: ۲۰ تکمیلی: — تشریحی: ۵

رشته تحصیلی-گرایش: ریاضی

زمان آزمون (دقیقه): تستی و تکمیلی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

کد درس: ۱۱۱۱۰۵۱

سؤالات تشریحی:

بارم هر سوال ۲ نمره

۱- فرض کنید g روی D پیوسته و $\{u_n(t)\}$ را به صورت زیر تعریف شود، آنگاه نشان دهید که $\{u_n(t)\}$ روی J به ازای هر $t \in J$ $(t, u_n(t)) \in D$ پیوسته اند.

$$u_0(t) = u_0$$

$$u_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^t g(s, u_0(s)) ds$$

$$\vdots$$

$$u_n(t) = u_0 + \int_{t_0}^t g(s, u_{n-1}(s)) ds$$

۲- معادله دیفرانسیل $y''' - 3y' + 2y = 9e^t$ $t > 0$ را حل کنید.

۳- ثابت کنید اگر قسمت حقیقی هر یک از مقادیر ویژه ماتریس $A = (a_{ij})$ منفی باشد، آنگاه تمام جوابهای معادله $x' = Ax$ مجانباً پایدار هستند.

۴- اگر $\varepsilon > 0$ و به ازای هر $t \geq \frac{1+\varepsilon}{4t^2}$ ، آنگاه نشان دهید که تمام جوابهای نابديهی معادله $u'' + a(t)u = 0$ نوسانی می باشند.

۵- فرض کنید که توابع $p(t)$ و $q(t)$ توابع پیوسته از متغیر t در بازه $r_1 < t < r_2$ باشند. اگر $y_1(t)$ و $y_2(t)$ جوابهایی از معادله $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ باشند که در هر نقطه از بازه (r_1, r_2) در شرط $W_{12}(y_1, y_2) \neq 0$ صدق می کنند، نشان دهید که هر جواب دیگری از این معادله یک ترکیب خطی از y_1 و y_2 می باشد.