

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضوعی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۹

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۳

۱. اگر $V = xU_1 - y^2U_3$ و $f = x^2y + z^3$ آنگاه $V[f]$ برابر است با:

الف. $2xy - 3y^2z^2$ ب. $2xy + 3y^2z^2$

ج. $2x^2y - 3y^2z^2$ د. $2xy^2 + 3y^2z^2$

۲. کدام یک از گزینه های زیر درست است؟

الف. $dydx = dxdy$ و dy فرمهای دیفرانسیلی روی E^3 هستند

ب. اگر ϕ و ψ ، ۱-فرمی باشند آنگاه $\phi \wedge \psi = \psi \wedge \phi$

ج. $dxdx = d^2x \neq 0$ (dx فرم دیفرانسیلی روی E^3 است)

د. $d(\phi \wedge \psi) = d\phi \wedge \psi - \phi \wedge d\psi$ که ϕ و ψ ، ۱-فرمی هستند.

۳. برای تابع $F: E^n \rightarrow E^m$ کدام یک از موارد زیرنا درست است

الف. F_* سرعتهای چهارحفظ نمی کند.

ب. در هر نقطه P از E^n ، F_{*p} یک نگاشت خطی است.

ج. F منظم است اگر در هر نقطه P از E^n ، F_{*p} یک به یک باشد.

د. F منظم است اگر در هر نقطه P از E^n مرتبه ماتریس ژاکوبی F برابر n باشد.

۴. شرط لازم و کافی برای آنکه خم β با تندی واحد در E^3 با $\kappa > 0$ مسطح باشد آن است که:

الف. $\tau = 0$ ب. $\beta = 1$ ج. $\beta = 0$ د. $N = 1$

۵. شرط لازم و کافی برای آنکه خم α با $\kappa > 0$ ، یک مارپیچ استوانه ایی باشد عبارت است از:

الف. $\frac{\beta}{\kappa}$ مثبت باشد. ب. $\frac{\tau}{\kappa}$ مثبت باشد. ج. $\frac{\beta}{\kappa}$ ثابت باشد. د. $\frac{\tau}{\kappa}$ ثابت باشد

۶. در خصوص فرمهای همبندی میدان سه وجهی $\begin{cases} E_1 = \cos \theta U_1 + \sin \theta U_2 \\ E_2 = -\sin \theta U_1 + \cos \theta U_2 \\ E_3 = U_3 \end{cases}$

الف. $\omega_{11} = d\theta$ و مابقی صفرند. ب. $\omega_{12} = -\omega_{21}$ ، $\omega_{12} = d\theta$ و مابقی صفرند

ج. $\omega_{11} = -d\theta$ و مابقی صفرند. د. همه صفرند.

۷. اگر F یک ایزومتري E^3 باشد کدام گزینه صحیح است؟

الف. F یک تبدیل متعامد است.

ب. یک انتقال یکتای T و یک تبدیل متعامد C وجود دارد به طوری که $F=TC$.

ج. F یک انتقال است.

د. F یک دوران است.

۸. در مورد هر تبدیل متعامد C با شرط $\det C=1$ کدام گزینه صحیح است؟

الف. برگردان است. ب. انتقال است.

ج. E^3 را پیرامون یک محور دوران می دهد. د. یک دوران توام انتقال است.

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۹

تعداد کل صفحات: ۳

۹. دو خم $\alpha, \beta: I \rightarrow E^3$ با تندی دلخواه قابل انطباق اند اگر:

- الف. $\tau_\alpha = \tau_\beta, \kappa_\alpha = \kappa_\beta$ ب. $\tau_\alpha = \pm \tau_\beta, \nu_\alpha = \nu_\beta$
ج. $\tau_\alpha = \pm \tau_\beta, \nu_\alpha = \nu_\beta, \kappa_\alpha = \kappa_\beta$ د. $\tau_\alpha = \pm \tau_\beta, \nu_\alpha = \nu_\beta > 0, \kappa_\alpha = \kappa_\beta > 0$

۱۰. کدام یک از زیرمجموعه های M از E^3 رویه است؟

- الف. $z^2 = x^2 + y^2$ ب. $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$
ج. $xy = 0, x \geq 0, y \geq 0$ د. $z = x^2 + y^2$

۱۱. $x(u, v) = (au \cos v, bu \sin v, u^2)$ نمایش پارامتری کدام رویه (با حذف فقط یک نقطه) است؟

- الف. $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ب. $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ج. $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ د. $z^2 = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

۱۲. اگر $u_1 = u$ و $u_2 = v$ توابع مختصات طبیعی و U_1 و U_2 میدان سه وجهی طبیعی روی E^2 و f یک تابع، ϕ یک -1 فرمی و η یک دو فرمی باشد در اینصورت کدام گزینه نادرست است؟

- الف. $\phi = g du_1 du_2$ که در آن $g = \eta(U_1, U_2)$ ب. $df = \frac{\partial f}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2} du_2$
ج. $d\phi = (\frac{\partial f_2}{\partial u_1} - \frac{\partial f_1}{\partial u_2}) du_1 du_2$ د. $f_i = \phi(U_i)$ که در آن $\phi = f_1 du_1 + f_2 du_2$

۱۳. گیریم e_2, e_1, k_2, k_1 خمیدگیها و بردارهای اصلی رویه $M \subset E^3$ در p باشند آنگاه قائم رویه M در امتداد $u = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$ برابر است:

- الف. $k_1 \cos \theta + k_2 \sin \theta$ ب. $k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta$
ج. $k_1 \cos \theta e_1 + k_2 \sin \theta e_2$ د. $k_1 \cos^2 \theta e_1 + k_2 \sin^2 \theta e_2$

۱۴. رویه $M \subset E^3$ را هنگامی گویند که خمیدگی متوسط آن صفر باشد.

- الف. هموار ب. ماکزیمال ج. مینیمال د. منظم

۱۵. اگر α یک خم اصلی و U یک میدان برداری قائم یک باشد آنگاه خمیدگی اصلی رویه M در امتداد α' برابر است با:

- الف. $\frac{\alpha' U}{\alpha' \cdot \alpha'}$ ب. $\frac{\alpha' U}{\alpha'' \cdot \alpha''}$ ج. $\frac{\alpha'' U}{\alpha' \cdot \alpha'}$ د. $\frac{\alpha'' U}{\alpha'' \cdot \alpha''}$

۱۶. ژئودزیکهای یک کره از تشکیل شده است.

الف. خطوط راست منحنی های آن

ب. دوائر عظیمه آن

ج. خمهایی به صورت $\alpha(t) = (r \cos \theta(t), r \sin \theta(t), t^2)$

د. خمهایی به صورت $\alpha(t) = (r \cos \theta(t), r \sin \theta(t), t)$

نام درس: هندسه دیفرانسیل موضعی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۹

تعداد سؤالات: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۳

۱۷. اگر رویه دورانی M منیمال باشد آنگاه M بخشی از می باشد.
- الف. هلیکوئید ب. کاتنویید ج. هلیکوئید یا یک صفحه د. کاتنویید یا یک صفحه
۱۸. فرضهای لم هیلبرت در کدام یک از گزینه های زیر برقرارند؟
- الف. در هر نقطه از استوای داخلی چنبره. ب. در هر نقطه از استوای یک کره .
- ج. در هر نقطه از دایره منیمال کاتنویید. د. گزینه های الف و ج.
۱۹. اگر $F : M \rightarrow N$ یک ایزومتري موضعی باشد آنگاه کدام گزینه نادرست است؟
- الف. F تندي خمها را حفظ می کند. ب. F طول خمها را حفظ می کند.
- ج. F خمیدگی اصلی را حفظ می کند. د. F خمیدگی گاوسی را حفظ می کند.
۲۰. در ایزومتري $F : M \rightarrow M$ برای هر نقطه p از M داریم $K(p) = \bar{K}(F(p))$ یعنی:
- الف. یک ایزومتري خمیدگیهای اصلی را حفظ می کند.
- ب. یک ایزومتري مجموع خمیدگیهای اصلی را حفظ می کند.
- ج. خمیدگی گاوسی یک تغییر ناپذیر ایزومتريک است.
- د. حاصلضرب خمیدگیهای اصلی را حفظ نمی کند.

سوالات تشریحی

۱. ثابت کنید اگر β خمی با تندي واحد و خمیدگی ثابت $K > 0$ و تاب صفر باشد، آنگاه β قوسی از دایره به شعاع $\frac{1}{K}$ است.
۲. برای خم $\alpha(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ اجزای دستگاه فرنه T, N, B ، K را محاسبه کنید.
۳. ثابت کنید اگر F یک ایزومتري از E^3 باشد به طوری که $F(0) = 0$ ، در اینصورت F یک تبدیل متعامد است.
۴. خمیدگی گاوسی بیضیگون $g = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ را که $m : g = \sum \frac{x_i^2}{a_i^2}$ بنویسید.
۵. قضیه لیلمان را بیان و اثبات نمائید.