

نام درس: توپولوژی عمومی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

تعداد سؤالات: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۴

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۵

۱. از مجموعه‌های زیر کدامیک یک توپولوژی روی R تشکیل می‌دهند؟

الف. $\tau_1 = \{(a, \infty), a \in R\} \cup \{R, \emptyset\}$ ب. $\tau_p = \{[a, b], a, b \in R\} \cup \{R, \emptyset\}$

ج. $\tau_s = \{(a, b], a, b \in R\} \cup \{R, \emptyset\}$ د. $\tau_e = \{(a, b), a, b \in R\} \cup \{R, \emptyset\}$

۲. در $X = \{a, b, c, d\}$ کدامیک یک توپولوژی تشکیل می‌دهند؟

الف. $T_1 = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{b, d, c\}\}$

ب. $T_p = \{X, \emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$

ج. $T_s = \{X, \emptyset, \{a, d\}, \{b, d\}, \{d\}, \{a, b, c\}\}$

د. $T_e = \{X, \emptyset, \{a, c\}, \{a, b, d\}, \{a\}, \{c\}\}$

۳. کدامیک از توابع زیر یک متریک نمی‌باشد؟

الف. $d_1 : X \times X \rightarrow R$ که $d_1(x, y) = d(x, y) \times \frac{1}{1 + d(x, y)}$ متری برای X است.

ب. $d_p : X \times X \rightarrow R$ که $d_p(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ متری برای X است.

ج. $d_s : X \times X \rightarrow R$ که $d_s(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_p(x_p, y_p)$ و $X = X_1 \times X_p$ می‌باشد.

د. $d : R \times R \rightarrow R$ که $d(x, y) = |x - y|^e$

۴. مجموعه $E = [a, b]$ را به عنوان زیرفضای R در نظر بگیرید. کدام مجموعه در E باز است، $(c = b - a)$

الف. $A = [a, a + \frac{c}{3}) \cup (a + \frac{c}{2}, b]$ ب. $B = [a, a + \frac{c}{3}] \cup [a + \frac{c}{2}, b)$

ج. $C = [a, a + \frac{c}{3}) \cup [a + \frac{c}{2}, b]$ د. $D = [a, a + \frac{c}{3}] \cup (a + \frac{c}{2}, b)$

۵. کدام عبارت همواره برقرار است؟

الف. $EXT(A \cup B) = EXT(A) \cup EXT(B)$

ب. $\text{int}(A) \subseteq \text{int}(B) \Rightarrow A \subseteq B$

ج. $\text{int}(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \text{int}(A_i)$

د. $\text{int}(\bigcup_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} (\text{int}(A_i))$

۶. (X, T) یک فضای توپولوژیک است. هرگاه $A \subseteq X$ باشد کدام عبارت صحیح است؟

الف. $\partial A \subseteq A$ ب. $X = A \cup \text{Ext } A$

ج. $\partial A = A - \text{Int } A$ د. $\bar{A} = \text{Int } A \cup \partial A$

نام درس: توپولوژی عمومی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۵

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۴

۷. هرگاه $f: X \rightarrow Y$ یک تابع باشد، از عبارات زیر کدامیک با سه عبارت دیگر معادل نیست؟
الف. f پیوسته است.

ب. به ازای هر مجموعه بسته E از Y ، $f^{-1}(E)$ در X بسته باشد.

ج. به ازای هر مجموعه دلخواه E از Y ، $f^{-1}[\overline{E}] \subseteq \overline{f^{-1}(E)}$

د. به ازای هر مجموعه دلخواه E از X ، $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$

۸. کدامیک از توابع زیر پیوسته نیست؟

الف. $f: X \rightarrow Y$ که X گسسته است. ب. $f: X \rightarrow Y$ که Y ناگسسته است.

ج. $i: R \rightarrow R_I$ د. $i: R_I \rightarrow R$

۹. کدامیک همبند نیست؟

الف. $R - Q$ در فضای R

ب. $R^2 - \{(0,0)\}$

ج. $R^3 - \{(0,0,t) : t \in R\}$

د. ΔX وقتی که X همبند باشد ($\Delta X = \{(x,x), x \in X\}$, $\Delta X \subseteq X \times X$)

۱۰. هرگاه X یک مجموعه سه عضوی باشد چند توپولوژی در X وجود دارد که دارای ۴ عضو می باشد.

الف. ۶ ب. ۷ ج. ۸ د. ۹

۱۱. کدامیک از فضاهای زیر موضعاً فشرده است؟

الف. R^n که در آن $n \geq 2$

ب. توپولوژی متمم شمارا با مجموعه زمینه ناشمارا

ج. $R - Q$

د. هر زیرمجموعه یک فضای موضعاً فشرده

۱۲. در یک فضای توپولوژی کدامیک از عبارات زیر برقرار نیست؟

الف. حاصلضرب هر تعداد متناهی از فضاهای فشرده، فشرده است.

ب. هر زیرمجموعه فشرده از یک فضای توپولوژی بسته است.

ج. در فضاهای اقلیدسی فشرده یک زیرمجموعه معادل بسته و کراندار بودن آن زیرمجموعه است.

د. هر فضای متری فشرده، کامل است.

۱۳. در یک فضای توپولوژی کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟

الف. هر فضای موضعاً فشرده فشرده است.

ب. توپولوژی متمم شمارا موضعاً فشرده است.

ج. هر فضای گسسته موضعاً فشرده است.

د. اجتماع هر تعداد از زیرمجموعه های فشرده یک فضا، فشرده است.

۱۴. کدامیک از فضاهای زیر ناهمبند است؟

ب. $R^2 - Q \times Q$

الف. $R - (R - Q)$

د. $\{(x,y) \in R^2 \mid x > 2\}$

ج. $S^n - \{P\}$ که $P \in S^n$ (S^n کره واحد در R^{n+1})

نام درس: توپولوژی عمومی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۵

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۴

۱۵. کدامیک از عبارات زیر درست است؟

الف. اگر Y در X همبند باشد $\text{int}(Y)$ همبند است.ب. اگر Y در X همبند باشد $\partial(Y)$ همبند است.ج. اگر Y در X همبند باشد و $\bar{Y} = X$ آنگاه X نیز همبند است.د. اگر A, B در X همبند باشند آنگاه $A \cap B$ همبند است.۱۶. کدامیک از عبارات زیر صحیح است؟ $(S = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\})$ الف. S موضعاً همبند است.ب. فضای Q کلاً ناهمبند است.ج. فضای Q موضعاً همبند است.

د. منحنی سینوسی توپولوژی دانان موضعاً همبند است.

۱۷. در یک فضای توپولوژی کدامیک از عبارات زیر با سایر عبارات معادل نمی باشد؟

الف. X هاسدورف است.ب. به ازای هر دو مجموعه بسته A و B در X که $A \cap B = \emptyset$ مجموعه های باز جدا از هم مانند U و V وجود دارندکه $A \subseteq U, B \subseteq V$ ج. ΔX در $X \times X$ بسته است. $(\Delta X = \{(x, x) \mid x \in X\})$ د. به ازای هر دو زیرمجموعه فشرده A و B در X که $A \cap B = \emptyset$ مجموعه های بازی مانند U و V وجود دارند بهطوری که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$

۱۸. کدامیک از عبارات زیر برقرار نیست؟

الف. هر فضای کاملاً منظم یک فضای منظم است.

ب. هر فضای تیخونوف یک فضای T_0 است.

ج. هر فضای لنیدلف یک فضای نرمال است.

د. هر فضای هاسدورف فشرده T_0 است.

۱۹. کدامیک از فضاهای زیر یک فضای منظم است؟

الف. فضای A - شاملب. فضای A - ناشامل (A حداقل دو عضو دارد).ج. فضای R با توپولوژی شعاع - راستد. فضای ناگسسته X با حداقل دو عضو

۲۰. در یک فضای توپولوژی کدامیک از عبارات زیر با سه عبارت دیگر معادل نمی باشد؟

الف. X یک فضای T_1 است.ب. به ازای هر عضو x از X ، $\{x\}$ بسته است.ج. هر زیرمجموعه متناهی X بسته است.د. در X حد هر دنباله یکتا است.

«سؤالات تشریحی»

۱. هرگاه (X, T) یک فضای توپولوژی باشند و $A \subseteq X$ ثابت کنید:الف. A باز است اگر و فقط اگر $A \cap \partial A = \emptyset$ ب. A بسته است اگر و فقط اگر $\partial A \subseteq A$

نام درس: توپولوژی عمومی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض)

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۵

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

تعداد کل صفحات: ۴

۲. اگر $f : X \rightarrow Y$ و $g : Y \rightarrow Z$ دو تابع باشند ثابت کنید هرگاه f تابعی باز بر X بروی Y و $g \circ f : X \rightarrow Z$ تابعی پیوسته باشد آنگاه g پیوسته است.

۳. اگر X, Y دو فضا و $f : X \rightarrow Y$ تابعی پیوسته باشد، ثابت کنید اگر X فشرده باشد آنگاه $f(X)$ فشرده است. آیا پیوستگی f ، فشرده بودن Y را ایجاب می‌کند؟ چرا؟ مثالی ارائه دهید.

۴. ثابت کنید حاصلضرب دو فضای همبند، همبند است. آیا این قضیه در مورد هر تعداد از حاصلضرب فضاها نیز برقرار است؟

۵. ثابت کنید فضای X همبند است اگر و فقط اگر هر تابع پیوسته $f : X \rightarrow \{0,1\}$ بر X بتوی فضای گسسته $\{0,1\}$ تابع ثابت باشد.