

نام درس: جبر خطی

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض و کاربردی)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۷۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد کل صفحات: ۵

۱. کدامیک از گزینه‌های زیر فضای  $R^p$  نیست؟

الف.  $\{(x, y) \mid x + y = 0\}$

ب.  $\{(x, y) \mid 2x - y = 0\}$

ج.  $\{(x, y) \mid y = x + 1\}$

د.  $\{(x, 0) \mid x \in R\}$

۲. کدامیک از مجموعه‌های زیر مستقل خطی است؟

الف.  $\{3, \sin^2 x, \cos^2 x\}$

ب.  $\{(0, 0), (1, 2)\}$

ج.  $\{(2, 3), (1, 4), (3, 5)\}$

د.  $\{x, \sin x, \cos x\}$

۳. مختصات بردار  $\alpha = (-5, 18, 19)$  در پایه  $S = \{(-3, 2, 1), (7, 4, 3), (1, 0, -2)\}$  برای  $R^3$  کدام است؟

الف.  $(2, 4, -5)$

ب.  $(5, -2, 4)$

ج.  $(2, -4, 5)$

د.  $(5, 2, -4)$

۴. تبدیل خطی  $T: V \rightarrow V$  را در نظر بگیرید. کدام گزینه نادرست است؟

الف. T وارونپذیر است اگر و فقط اگر نامنفرد باشد.

ب. T یک به یک است اگر و فقط اگر  $\ker T = \{0\}$ 

ج. T یک به یک است اگر و فقط اگر پایه‌ای از فضای برداری V را به پایه دیگری از آن تصویر کند.

د. T پوشا است اگر و فقط اگر  $\dim V = \dim(\text{Im } T)$ ۵. فرض کنید  $T: R^2 \rightarrow R^2$  با ضابطه  $T(x, y) = (4x - y, 2x + y)$  داده شده باشد. ماتریس T نسبت به پایه $\{(1, 1), (-1, 0)\}$  کدام است؟

الف.  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

ب.  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

ج.  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

د.  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

نام درس: جبر خطی

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض و کاربردی)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۷۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد کل صفحات: ۵

۶. کدام گزینه نادرست است؟

الف. مجموعه‌های متعامد مستقل خطی‌اند. ب.  $x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0$ .

ج.  $\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\|$  د.  $\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  برای  $1 \leq p < \infty$

۷. اگر  $V$  یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی و  $A, B$  زیر فضای  $V$  باشند، آنگاه کدام گزینه برابر  $(A \cap B)^\perp$  است؟

الف.  $A^\perp + B^\perp$  ب.  $A^\perp \cap B^\perp$  ج.  $A^\perp \cup B^\perp$  د.  $(A + B)^\perp$

۸. مقادیر ویژه ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$  عبارتند از:

الف. ۲, ۳ ب. ۱, ۲ ج. ۰, ۱ د. ۲, ۳ -

۹. کدام گزینه نادرست است؟

الف.  $m_A$  چند جمله‌ای  $\chi_A$  را تقسیم می‌کند. ب.  $\chi_A$  وابسته به انتخاب پایه است.

ج.  $m_A(A) = 0$  د. صفرهای  $\chi_A, m_A$  برابرند.

۱۰. نگاشت خطی  $f: R^3 \rightarrow R^3$  با تعریف  $f(x, y, z) = (-z, x + z, y + z)$  را در نظر بگیرید. در این صورت

$m_f$  برابر کدام است؟

الف.  $m_f = (X - 1)(X + 2)^2$  ب.  $m_f = (X + 1)(X - 1)^2$

ج.  $m_f = (X - 2)^2$  د.  $m_f = (X + 1)(X - 2)$

نام درس: جبر خطی

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض و کاربردی)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۷۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد کل صفحات: ۵

۱۱. اگر  $f: V \rightarrow V$  پوچتوان باشد کدام گزینه درست است؟

الف. ماتریس  $f$  نسبت به هر پایه‌ای برای  $V$  قطری است.

ب. ماتریس  $f$  نسبت به پایه‌ای برای  $V$  پایین مثلثی است.

ج. ماتریس  $f$  نسبت به پایه‌ای برای  $V$  درایه‌های قطری غیر صفر دارد.

د. ماتریس  $f$  نسبت به پایه‌ای برای  $V$  با درایه‌های قطری صفر است.

۱۲. پایه  $\{(1,2), (2,3)\}$  از  $R^2$  را در نظر بگیرید، در این صورت  $v_1^d(x, y)$  برابر است با:

الف.  $3x + 2y$  ب.  $2x - y$  ج.  $-3x + 2y$  د.  $-2x + 3y$

۱۳. اگر  $W, V$  با بعد متناهی و  $f: V \rightarrow W$  تبدیل خطی باشد، آنگاه کدام گزینه درست نیست؟

الف.  $\dim \operatorname{Im} f^t = \dim \ker f$  ب.  $\dim \ker f^t = \dim \ker f$

ج.  $(\ker f)^\circ = \operatorname{Im} f^t$  د.  $(\operatorname{Im} f)^\circ = \ker f^t$

۱۴. فرض کنید  $\hat{V}$  دوگان مضاعف  $\alpha_{V,V}$  نگاشت متعارف از  $V$  به  $\hat{V}$  باشد. کدام گزینه برابر  $\hat{x}(y^d)$  می‌باشد.

الف.  $y^d(\hat{x})$  ب.  $\langle y^d, x \rangle$  ج.  $y^d(x)$  د.  $\langle y, x^d \rangle$

۱۵. فرض کنید  $V$  یک فضای ضرب داخلی باشد و  $E$  زیر مجموعه ناتهی از  $V$  باشد در این صورت متمم قائم  $E$  برابر است با:

الف.  $E^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in E \langle x \mid y \rangle = 0\}$  ب.  $E^\perp = \{x \in V \mid \forall y \in E \langle x \mid x \rangle = 0\}$

ج.  $E^\perp = \{y \in V \mid \forall y \in E \langle x \mid y \rangle = 0\}$  د.  $E^\perp = \{y \in V \mid \forall x \in E \langle x \mid y \rangle = 0\}$

۱۶. فرض کنید  $V$  فضای چندجمله‌ای‌های با درجه حداکثر  $n$  باشد و  $W = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$  در این صورت  $\dim W$  برابر کدام است؟

الف.  $n - 1$  ب.  $n$  ج.  $n - 3$  د. صفر

نام درس: جبر خطی

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض و کاربردی)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۷۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد کل صفحات: ۵

۱۷. اگر  $V$  یک فضای ضرب داخلی با بعد متناهی باشد و  $f: V \rightarrow V$  عملگر خطی باشد آنگاه  $(\ker f)^\perp$  برابر است با:

الف.  $\ker f^*$  ب.  $(\operatorname{Im} f)^\perp$  ج.  $\operatorname{Im} f^*$  د.  $\ker f$

۱۸. یک فرم دوخطی  $\nu: R^3 \times R^3 \rightarrow R^3$  برای ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  برابر کدام است؟

الف.  $x_1(y_1 + y_2) + x_1 y_3$  ب.  $(x_1 + x_2)y_1 + y_2 x_1$   
ج.  $x_1(y_2 + y_3) + x_2 y_3$  د.  $(x_2 + x_3)(y_1 + y_3) + x_2 x_3$

۱۹. فرض کنید  $A, B$  ماتریسهای مربعی  $n \times n$  باشند مقادیر ویژه  $AB$  برابر مقادیر ویژه  $BA$  کدام گزینه است؟

الف.  $A^t B$  ب.  $B^t A$  ج.  $A^t B^t$  د.  $BA$

۲۰. اگر  $f: V \rightarrow V$  یک تصویر باشد در این صورت کدام گزینه نادرست است؟

الف.  $f \circ f = f$  ب.  $V = \operatorname{Im} f \oplus \ker f$   
ج.  $\operatorname{Im} f = \ker(\operatorname{id}_V - f)$  د.  $f$  تصویر روی  $\ker f$  به موازات  $\operatorname{Im} f$  است.

### سؤالات تشریحی

۱. فرض کنید که  $V$  یک فضای ضرب داخلی و  $W$  یک زیر فضای بعد متناهی از  $V$  باشد. ثابت کنید که  $V = W \oplus W^\perp$

۲. ثابت کنید که ماتریس  $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -7 & 6 & 5 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$  قطری شدنی است.

نام درس: جبر خطی

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض و کاربردی)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۷۰ دقیقه تشریحی ۸۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۴۰

تعداد کل صفحات: ۵

۳. فرض کنید  $V$  یک فضای برداری متناهی بعد ناصفر روی هیأت  $V, F$   $f: V \rightarrow V$  یک نگاشت خطی پوچتوان باشد. ثابت

کنید که پایه‌ای چون  $\{v_1, \dots, v_n\}$  برای  $V$  وجود دارد که:

$$f(v_n) \in \langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle, \dots, f(v_p) \in \langle v_1 \rangle, \quad f(v_1) = o_V$$

۴. پایه  $\{x_1 = (0, 1, 1), x_2 = (1, 0, 1), x_3 = (1, 1, 0)\}$  از  $R^3$  را در نظر بگیرید و با استفاده از روش گرام-اشمیت یک پایه

یکامتعامد برای  $R^3$  بسازید.

۵. نشان دهید که فرم درجه دوم  $Q(x, y, z) = 2xy + 2yz$  دارای رتبه ۲ و نشان صفر است.