

نام درس: جبر ۱

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی .. تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض و کاربردی)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۳۷

تعداد کل صفحات: ۳

۱. جایگشت  $\sigma = (3, 2, 1)(4, 6, 3)(2, 1) \in S_6$  :

الف. زوج است ب. فرد است ج. جایگشت همانی است د. دوری نیست

۲. کدام گزاره صحیح است؟

الف. هر دو گروه از مرتبه ۴ یکرخت هستند.

ب.  $Z_6 \times Z_2$  با  $Z_6$  یکرخت است.ج.  $Z_6 \times Z_2$  با  $K_4$  (چهار عضوی کلین) یکرخت است.د. هر عضو مخالف همانی در  $K_4$  مولد  $K_4$  است.۳. فرض کنید  $G$  یک گروه و  $H$  زیر مجموعه غیر تهی از  $G$  باشد. در این صورت کدام گزاره درست نیست؟الف.  $H$  زیر گروه  $G$  است اگر و تنها اگر  $H$  دارای عضو همانی  $G$  باشد و وارون هر عضو  $H$  متعلق به  $H$  باشد.ب.  $H$  زیر گروه  $G$  است اگر و تنها اگر  $\forall a, b \in H, ab^{-1} \in H$ ج.  $H$  زیر گروه  $G$  است اگر و تنها اگر  $\forall a, b \in H, ba^{-1} \in H$ د.  $H$  زیر گروه  $G$  است اگر و تنها اگر  $\forall a, b \in H, a + b \in H$ ۴. فرض کنید  $\phi: G \rightarrow G$  همریختی گروهی باشد که در آن  $G$  متناهی از مرتبه ۲۰ و  $H \leq G$  باشد. در این صورت $|\phi(H)|$  برابر است با :

الف. ۵ ب. ۳ ج. ۱۲ د. ۶

۵. گروه  $G$  یک گروه متناهی از مرتبه ۱۲ است. در این صورت:الف. گروه  $G$  با  $Z_{12}$  یکرخت است.ب. گروه  $G$  اگر آبدی باشد با  $Z_{12}$  یکرخت است.ج. گروه  $G$  اگر دوری باشد با  $Z_{12}$  یکرخت است.د. گروه  $G$  با  $Z_6 \times Z_2$  یکرخت است

۶. کدام گزینه درست است؟

الف.  $Z_{600} \cong Z_4 \times Z_{10} \times Z_{15}$  ب.  $Z_{600} \cong Z_8 \times Z_{15} \times Z_5$ ج.  $Z_{600} \cong Z_{24} \times Z_{25}$  د.  $Z_{600} \cong Z_6 \times Z_4 \times Z_{25}$ ۷. اگر  $m, n$  اعداد صحیح مثبت باشند و  $[m, n]$  کوچکترین مضرب مشترک و  $(m, n)$  بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنگاه:الف.  $mZ \cap nZ = (m, n)Z$ ب.  $mZ + nZ = (m, n)Z$ ج.  $mZ \cap nZ = [m, n]Z$ د.  $mZ + nZ = [m, n]Z$

نام درس: جبر ۱

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی .. تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض و کاربردی)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۳۷

تعداد کل صفحات: ۳

۸. فرض کنید  $G$  یک گروه و  $N \triangleleft G$  به طوری که  $\frac{G}{N}$  آبلی باشد. در این صورت کدام گزینه صحیح است؟

الف.  $G' \subseteq N$  ب.  $N \subseteq Z(G)$  ج.  $N = G'$  د.  $N \subseteq G'$

۹. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است؟

الف. اگر تمام زیر گروه‌های گروه  $G$  نرمال باشند آنگاه  $G$  آبلی است.

ب. اگر  $H \leq G$ ,  $K \triangleleft G$  آنگاه  $HK = KH$ .

ج. اگر  $H \leq G$ ,  $K \triangleleft G$  آنگاه  $HK \leq G$ .

د. اگر  $K \leq G$ ,  $H \triangleleft G$  آنگاه  $HK \leq G$ .

۱۰. مرتبه همدسته  $\langle [4] \rangle < 5+$  در گروه خارج قسمت  $\frac{\mathbb{Z}_{12}}{\langle [4] \rangle}$  برابر است با:

الف. ۲ ب. ۵ ج. ۴ د. ۳

۱۱. مرتبه جایگشت  $\sigma = (2, 4, 5, 1)(3, 7, 6, 4)(2, 5, 4) \in S_7$  برابر است با؟

الف. ۸ ب. ۲ ج. ۱۲ د. ۱

۱۲. کدام گزاره درست است؟

الف.  $Z$  ایده‌آل  $Q$  است. ب.  $Z$  زیر حلقه  $Q$  است.

ج. هر ایده‌آل  $Z$  یک ایده‌آل  $Q$  است. د.  $Z$  ایده‌آل ندارد.

۱۳. فرض کنید  $R$  یک حلقه جابجایی و  $I, J$  ایده‌آل‌های آن باشند. در این صورت داریم:

الف.  $I + J \subseteq IJ$  ب.  $IJ \subseteq I \cap J$

ج.  $I \subseteq IJ$  د.  $J \subseteq IJ$

۱۴. کدام گزینه در مورد ایده‌آل  ${}^3Z$  از حلقه  $Z$  درست نیست؟

الف.  ${}^3Z$  یک ایده‌آل ماکسیمال است. ب.  ${}^3Z$  ایده‌آل اول نیست.

ج.  ${}^3Z$  ایده‌آل ماکسیمال نیست. د.  $\frac{Z}{{}^3Z}$  میدان است.

۱۵. کدام گزاره نادرست است؟

الف. اگر  $I$  ایده‌آل حلقه  $R$  باشد به طوری که  $\frac{R}{I}$  دامنه ایده‌آل اصلی باشد آنگاه  $I$  یک ایده‌آل اول است.

ب. اگر  $I$  یک ایده‌آل حلقه  $R$  باشد به طوری که  $\frac{R}{I}$  میدان باشد آنگاه  $I$  یک ایده‌آل ماکسیمال است.

ج. اگر  $R$  یک میدان باشد آنگاه  $R$  یک دامنه ایده‌آل اصلی است.

د. اگر  $I$  یک ایده‌آل اول حلقه  $R$  باشد آنگاه  $\frac{R}{I}$  یک دامنه صحیح است.

۱۶. تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه  $Z$  برابر است با:

الف. صفر ب. ۱ ج. بی‌شمار د. ۲

نام درس: جبر ۱

تعداد سؤال: نسی ۲۰ تکمیلی .. تشریحی ۵

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی (محض و کاربردی)

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

کد درس: ۱۱۱۱۰۳۷

تعداد کل صفحات: ۳

۱۷. فرض کنید  $M$  یک ایده آل ماکسیمال حلقه جابجایی و یکدار و متناهی  $R$  است. در این صورت مشخصه حلقه  $\frac{R}{M}$  برابر

است با:

الف. صفر      ب. یک عدد اول      ج. توانی از یک عدد اول      د. هیچکدام

۱۸. در  $Z$  ایده آل‌های اول دارای کدام خاصیت هستند

الف. ایده آل اولی وجود دارد که ماکسیمال نیست.

ب. همه به شکل  $nZ$  هستند که در آن  $n$  عددی طبیعی است.

ج. همان ایده آل‌های ماکسیمال هستند.

د. فقط  $\{0\}$  ایده آل اول  $Z$  است.

۱۹. فرض کنید  $f: R \rightarrow R'$  یک همریختی ناصفر باشد به طوری که حلقه  $R$  یک میدان باشد. در این صورت  $\ker f$

الف. مخالف  $\{0\}$  است      ب. برابر  $R$  است

ج. برابر  $\{0\}$  است      د. ایده آل ماکسیمال  $R$  نیست

۲۰. دامنه صحیح  $R$  وقتی میدان است که

الف.  $R$  متناهی باشد

ب.  $R$  نامتناهی باشد

ج. به ازای هر  $a, b \in R$  اگر  $a, b \neq 0$  آنگاه  $ab \neq 0$

د. گروه جمعی  $R$  دوری باشد.

### سوالهای تشریحی

۱. قضیه لاگرانژ را برای گروه‌های متناهی بیان و اثبات کنید.

۲. در  $S_6$  جایگشت  $\sigma = (1, 3, 5, 2)(2, 6, 3, 1, 4)$  را به حاصل ضرب دورهای مجزا از هم تجزیه کنید. آیا  $\sigma$  زوج است؟

مرتبه  $\sigma$  را بدست آورد. وارون  $\sigma$  را نیز محاسبه نمایید.

۳. یکی از دو قسمت الف یا ب زیر را اثبات کنید ( $R$  یک حلقه جابجایی و یکدار)

الف.  $M$  ایده آل ماکسیمال  $R$  است اگر و تنها اگر  $\frac{R}{M}$  میدان باشد

ب.  $M$  ایده آل اول  $R$  است اگر و تنها اگر  $\frac{R}{M}$  دامنه صحیح باشد.

۴. قضیه اساسی اول همریختی‌ها را برای حلقه‌ها بیان و اثبات کنید.

۵. فرض کنید  $G$  یک گروه و  $H$  زیر گروه هنجار  $G$  باشد، نشان دهید:

الف. اگر  $G$  آبلی باشد آنگاه  $\frac{G}{H}$  آبلی است.

ب. اگر  $G$  دوری باشد آنگاه  $\frac{G}{H}$  دوری است.