

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: روشهای چند متغیره پیوسته
رشته تحصیلی و کد درس: آمار (۱۱۷۰۴۹)

مجاز است.

استفاده از ماشین حساب

کد سری سؤال: یک (۱)

امام علی^(ع): شرافت به خرد و ادب است نه به دارایی و نژاد.

۱. مقدار آمارهای هتلینگ به ازای کدام تبدیل تغییری نمی‌کند؟

الف. $Y = AX + b$ ب. $Y = AX$ ج. $Y = X + b$ د. هر سه گزینه۲. هرگاه مولفه‌های بردار X همگی دارای واریانس برابر و همبستگی مشترک معادل ρ باشند، ماتریس Σ به صورتالف. یک ماتریس قطری است. ب. $\Sigma = \sigma^2((1-\rho)I_p + \rho LL')$ است.ج. بستگی به توزیع بردار تصادفی دارد. د. ρI_p است.۳. برای هر ماتریس همبستگی ρ ، کدام گزینه نادرست است؟الف. پارامترهای آن کمتر از ماتریس کوواریانس است. ب. $tr(\rho) = p$

ج. مقادیر ویژه‌ی آن همواره کمتر از یک است. د. ماتریس همانی، می‌تواند یک ماتریس همبستگی باشد.

۴. اگر X_1 و X_2 مولفه‌های بردار تصادفی X باشند و فرض کنید $Y_1 = a_1X_1 + a_2X_2$ و $Y_2 = b_1X_1 - b_2X_2$ ، آنگاه مقدار ژاکوبی مخالف صفر است هرگاه:الف. $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ب. $a_1b_2 + a_2b_1 \neq 0$ ج. $a_1b_1 - a_2b_2 \neq 0$ د. $a_1b_1 + a_2b_2 \neq 0$

۵. کدام ماتریس یک ماتریس همبستگی است؟

الف. $\begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.4 & 1 \end{pmatrix}$ ب. $\begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1.2 \end{pmatrix}$ ج. $\begin{pmatrix} 1 & -0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$ د. $\begin{pmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{pmatrix}$ ۶. برای ماتریس $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & a & b \\ a & 9 & c \\ b & c & 25 \end{pmatrix}$ ، مقادیر a, b, c چقدر باشند تا مقدار دترمینان برابر $3 \times 9 \times 25$ شود؟الف. $a = b = c$ ب. $a = b = c = 0$ ج. $a = c = 0, b = 5$ د. $a = 4, c = 0, b = 5$ ۷. فرض کنید $Y = X_1 + 2X_2 + 3X_3$ با $E(X_i) = \mu$ و $\Sigma = \sigma^2((1-\rho)I_3 + \rho LL')$ است. آنگاه کدام گزینه نادرست است؟الف. $E(Y) = 6\mu$ ب. $\text{var}(Y) = \sigma^2(14 + 20\rho)$ ج. $E(Y | 3(X_3 - \mu) = 0) = 3\mu$ د. $\text{var}(Y | X_1 + 2X_3 = 8) = 9\sigma^2$ ۸. فرض کنید X_1, X_2, \dots, X_{10} نمونه‌ی تصادفی از توزیعی با بردار میانگین $\mu = \mu L$ و ماتریس کوواریانس $\Sigma = \sigma^2 I_p$ باشد آنگاه باداشتن ماتریس کوواریانس نمونه‌ای $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$ ، برآوردگر ناریب برای σ^2 کدام گزینه است؟الف. $\frac{10}{9} S_n$ ب. $\frac{tr(S_n)}{p}$ ج. $\frac{10}{9} \frac{tr(S_n)}{p}$ د. $\frac{9}{10} \frac{tr(S_n)}{p}$ ۹. مطابق اطلاعات سوال ۸، مقدار امید ریاضی $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i' X_i$ برابر است با:الف. $p(\sigma^2 + \mu^2)$ ب. $10(\sigma^2 + \mu^2)$ ج. $10(\sigma^2 + 20\rho + \mu^2)$ د. $p(\sigma^2 - 10\rho + \mu^2)$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: روشهای چند متغیره پیوسته
رشته تحصیلی و کد درس: آمار (۱۱۷۰۴۹)

مجاز است.

استفاده از ماشین حساب

کد سری سؤال: یک (۱)

۱۰. کدامیک از گزینه‌های زیر آماره‌ی بسنده برای Σ ، ماتریس کوواریانس جامعه نرمال نیست؟

الف. S_n ب. $\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i'$ ج. $\sum_{i=1}^n (\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X}_i - \bar{\mathbf{X}})'$ د. $\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{X}_i \mathbf{X}_i', \bar{\mathbf{X}} \right)$

۱۱. فاصله‌ی مایلانویس کمترین مقدار را می‌گیرد هرگاه:

- الف. دو جامعه دارای توزیع نرمال باشند. ب. ماتریس کوواریانس آنها مشترک باشد.
ج. بردارهای میانگین دو جامعه برابر باشند. د. به ازای بردار میانگین محاسبه شود.

۱۲. اگر $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_p)$ آنگاه توزیع $\frac{\boldsymbol{\mu}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})}{\sqrt{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}}}$ کدام گزینه است؟

الف. $N(0, \sigma^2)$ ب. $\chi_p^2(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu})$ ج. $N_p(\mathbf{0}, \sigma^2 \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu})$ د. χ_1^2

۱۳. اگر $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_p)$ آنگاه توزیع $\frac{1}{\sigma^2 \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu}'(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})'$ کدام گزینه است؟

الف. $W_p(\sigma^2 \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu})$ ب. $\chi_p^2(\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu})$ ج. $W_1(\sigma^2 \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\mu})$ د. χ_1^2

۱۴. تحت مدل کوواریانس $\Sigma = \sigma^2[(1-\rho)\mathbf{I}_p + \rho \mathbf{L}\mathbf{L}']$ و ماتریس کوواریانس نمونه‌ای $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 7/82 & 7/93 & 7/98 \\ 9/38 & 8/87 & \\ & 9/79 & \end{pmatrix}$ برآورد درست‌نماییماکسیمم برای σ^2 کدام گزینه است؟

الف. ۹/۹ ب. ۷/۸ ج. ۹ د. ۹/۹۱۸

۱۵. با یک نمونه‌ی تصادفی ۱۰ تایی با بعد ۴، آماره‌ی آزمون $\frac{1}{3} = p_{1.34} : H_0$ ، چه توزیعی دارد؟

الف. $F_{3,6}$ ب. $F_{3,8}$ ج. $N(0, \frac{1}{7})$ د. $N(0, \frac{1}{3})$

۱۶. براساس این‌که تحت فرض نرمال چندمتغیره و $\rho_{1.23\dots p} = 0$ داریم $\frac{(n-p)R^2}{(p-1)(1-R^2)} \sim F_{p-1, n-p}$ ، کدام گزینه درباره‌ی ماتریس

کوواریانس صحیح است؟

الف. $\sigma_{il} = \sigma_{li} = 0; i = 2, 3, \dots, p$ ب. $\sigma_{21} \Sigma_{22}^{-1} \sigma_{12} = 0$
ج. $\Sigma_{22} = \mathbf{I}_{p-1}; \sigma'_{12} = \sigma_{21} = \mathbf{0}$ د. هیچ‌گونه قضاوتی درباره‌ی ماتریس کوواریانس نمی‌توان داشت.

۱۷. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_8 \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ و Σ معلوم، آماره‌ی آزمون $H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ چه توزیعی دارد؟

الف. $F_{3,5}$ ب. $F_{3,4}$ ج. χ_3^2 د. $t(7)$

۱۸. $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_8 \sim N_3(\boldsymbol{\mu}, \sigma^2 \mathbf{I}_3)$ و σ^2 نامعلوم، آماره‌ی آزمون $H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ چه توزیعی دارد؟

الف. $F_{3,5}$ ب. $F_{3,4}$ ج. χ_3^2 د. $t(23)$

۱۹. برای مشاهدات $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 4 \\ 8 & 5 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ مقدار هتلینگ برای آزمودن $H_0: \boldsymbol{\mu}' = (3 \ 7)$ برابر است با:

الف. ۱۳/۶۳۶ ب. ۱۱/۶۳۶ ج. ۱۲/۳۶۳ د. ۹/۲۵۴

نام درس: روشهای چند متغیره پیوسته	تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
رشته تحصیلی و گد درس: آمار (۱۱۱۷۰۴۹)	زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
گد سری سؤال: یک (۱)	آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗
استفاده از ماشین حساب	مجاز است.

۲۰. برای سه جامعه‌ی نرمال مستقل، دو بعدی با چهار مشاهده از هر جامعه، آماره‌ی مناسب برای آزمودن برابری میانگین‌های سه جامعه در حالی که ماتریس‌های کوواریانس مشترک دارند چیست؟

الف. $U_{3,2,4}$ ب. $U_{2,3,4}$ ج. $U_{2,2,1}$ د. $U_{2,3,5}$

سؤالات تشریحی

بارم هر سؤال ۱/۴ نمره می‌باشد.

۱. ثابت کنید اگر $\mathbf{X} \sim N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ و $\Sigma > \mathbf{0}$ ، آنگاه $\mathbf{X}'\mathbf{A}\mathbf{X}$ دارای توزیع کای اسکور نامرکزی با r درجه‌ی آزادی با پارامتر نامرکزی $\boldsymbol{\mu}'\mathbf{A}\boldsymbol{\mu}$ است اگر و تنها اگر $rank(\mathbf{A}\Sigma) = tr(\mathbf{A}\Sigma) = r$ و $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$.

۲. نشان دهید ماکسیمم مقدار همبستگی بین متغیر تصادفی X_1 و هر ترکیب خطی از زیر بردار تصادفی $\mathbf{X}_2 = (X_2 \ X_3 \ \dots \ X_p)'$ برابر با $\sqrt{\frac{\boldsymbol{\sigma}'_{21}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\sigma}_{21}}{\sigma_{11}}}$ است.

۳. با توجه به اطلاعات زیر، آماره‌ی آزمون $H_0: \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \mu_2 = 45/4$ در برابر $H_1: \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}, \mu_2 = 45/4$ را به دست آورید.

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 4/640 \\ 45/400 \\ 9/965 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} 2/879 & 10/002 & -1/810 \\ & 199/797 & -5/627 \\ & & 3/628 \end{pmatrix} \quad n = 10 \quad \mathbf{s}^{-1} = \begin{pmatrix} 0/5864 & -0/0220 & 0/2583 \\ & 0/0060 & 0/0016 \\ & & 0/4020 \end{pmatrix}$$

$$\frac{n-p}{p-q} \frac{T_p^2 - T_q^2}{n-1+T_q^2} \sim F_{p-q, n-p}$$

۴. از روی ماتریس کوواریانس $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ، جامعه نرمال با بردار میانگین صفر، توزیع توأم مولفه‌های اصلی را به دست آورید.

۵. خطاهایی که در مبحث رده‌بندی ممیزی مطرح شده است را تعریف نموده و شرایط برقراری تساوی $E_1 = E_2 = \Phi(\frac{-1}{2}\Delta)$ را ذکر کنید.