

نام درس: آنالیز ۱
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۳۸ - آمار - ۱۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ناپیوسته ۱۱۱۲۸۶
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗
کد سری سؤال: یک (۱)
استفاده از: --
مجاز است.

امام علی^(ع): شرافت به خرد و ادب است نه به دارایی و نژاد.

۱. اگر $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ خانواده‌ای غیرتهی از زیر مجموعه‌های غیرتهی R باشند، کدام گزینه صحیح است؟

الف. $\sup \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \right\} = \sup \{ \sup I_\alpha \mid \alpha \in A \}$ ب. $\sup \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \right\} = \inf \{ \sup I_\alpha \mid \alpha \in A \}$

ج. $\inf \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \right\} = \inf \{ \sup I_\alpha \mid \alpha \in A \}$ د. $\inf \left\{ \bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha \right\} = \sup \{ \inf I_\alpha \mid \alpha \in A \}$

۲. اگر $a, b \in R$ و a نامنفی باشند و $A = \left\{ a + \frac{b}{n} \mid n \in N \right\}$ آنگاه $\sup A - \inf A$ برابر است با:

الف. $(a + b)$ ب. b ج. a د. $(a - b)$

۳. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی کراندار از اعداد حقیقی باشند، دراینصورت کدام گزینه همواره صحیح است؟

الف. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$ ب. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} b_n$

ج. $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ د. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

۴. حد بالای دنباله $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \cos n\pi \right\}$ برابر است با:

الف. ۱ ب. صفر ج. e د. $-e$

۵. کدام سری همگراست؟

الف. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ ب. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}$

ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^n} - 1 \right)^n$ د. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

نام درس: آنالیز ۱

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۳۸ - آمار - ۱۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ناپیوسته ۱۱۱۲۸۶

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: --

مجاز است.

۶. کدام سری واگراست؟

الف. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ج. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ د. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

۷. کدام گزینه صحیح می باشد؟

الف. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0$

ب. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ، آنگاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

ج. به ازای هر $a \in \mathbb{R}$ ، $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$

د. اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $k \in \mathbb{R}$ ، $a_n > 0$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ ، آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

۸. اگر $A = \left\{ \frac{k}{2^n} \mid 1 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N} \right\}$ آنگاه A' کدام است؟

الف. $A' = [0, 1]$ ب. $A' = (0, 1]$ ج. $A' = \left[\frac{1}{2}, k \right]$ د. $A' = [0, k]$

۹. اگر A_1 و A_2 دو مجموعه باز و همبند باشند و $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ ، کدام گزینه صحیح است؟الف. B همبند است.ب. اگر B باز باشد، همبند است.ج. B باز است ولی همبند نیست.د. در مورد B چیزی نمی توان گفت.۱۰. هر گاه (M, d) یک فضای متریک و $A \subseteq M$ و $p \in M$ آنگاه کدام گزینه نادرست است؟الف. اگر $p \in A'$ آنگاه هر همسایگی محذوف p شامل نقطه ای از A است.ب. اگر $p \in A'$ آنگاه هر همسایگی p شامل تعداد نامتناهی نقطه از A است.ج. اگر $p \in A'$ آنگاه $p \in A$ د. اگر $\{x_n\} \subseteq A$ موجود باشد که $x_n \neq p$ و $x_n \rightarrow p$ آنگاه $p \in A'$

نام درس: آنالیز ۱

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۳۸ - آمار - ۱۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ناپیوسته ۱۱۱۲۸۶

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: --

مجاز است.

۱۱. هرگاه (M, d) یک فضای متریک و $E \subseteq M$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

الف. $(E^c)^0 = (E^0)^c$ ب. $(E^c)^0 = (E^0)^c$ ج. $\overline{E} = \overline{E^0}$ د. $E^0 = (\overline{E})^0$

۱۲. کدام مجموعه در صفحه فشرده است؟

الف. $\{(x, y) \mid ax = by\}$ ب. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

ج. $\{(x, 0) \mid -1 \leq x < 1\}$ د. $\{(x, y) \mid |x + y| \geq 1\}$

۱۳. اگر A و B دو مجموعه همبند باشند و $A \cap B \neq \emptyset$ در اینصورت:الف. $A \cap B$ نیز همبند است. ب. $A - B$ همبند است.ج. $A \cup B$ همبند است. د. $A \cap \overline{B}$ همبند است.۱۴. تابع $f(x) = \begin{cases} x & , x \in Q \\ 1-x & , x \notin Q \end{cases}$ در کدام نقاط دارای حد است؟

الف. فقط در $x = \frac{1}{2}$ ب. اعداد گویا ج. فقط در $x = 0$ د. اعداد حقیقی

۱۵. اگر X و Y دو فضای متریک و $f: X \rightarrow Y$ یک تابع پیوسته باشد، کدام گزینه نادرست است؟الف. اگر $V \subseteq Y$ باز باشد آنگاه $f^{-1}(V)$ باز است.ب. اگر $F \subseteq Y$ بسته باشد آنگاه $f^{-1}(F)$ بسته است.ج. اگر $F \subseteq X$ فشرده باشد آنگاه $f(F)$ فشرده است.د. اگر $U \subseteq X$ باز باشد آنگاه $f(U)$ باز است.۱۶. اگر X و Y دو فضای متریک و $f: X \rightarrow Y$ پیوسته و یک به یک باشد، آنگاه:الف. f^{-1} نیز تابعی پیوسته است. ب. اگر X فشرده باشد، f^{-1} پیوسته است.ج. اگر X کراندار باشد، f^{-1} پیوسته است. د. اگر X همبند باشد، f^{-1} پیوسته است.

نام درس: آنالیز ۱
رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۳۸ - آمار - ۱۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ناپیوسته ۱۱۱۲۸۶
تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗
کد سری سؤال: یک (۱)
استفاده از: --
مجاز است.

۱۷. فرض کنید که f تابعی حقیقی باشد که روی $[a, b]$ تعریف شده است و $f(a)f(b) < 0$ در اینصورت:

الف. نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ موجود است که $f(c) = 0$

ب. نقطه‌ای مانند $c \in (a, b)$ موجود است که $f'(c) = 0$

ج. تمام مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند.

د. با فرضیات فوق در مورد f چیزی نمی‌توان گفت.

۱۸. اگر $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ آنگاه:

الف. $f'(0) = 0$ ب. $f'(0) = 1$ ج. $f'(0) = -1$ د. $f'(0)$ موجود نیست.

۱۹. تابع $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ را در نظر بگیرید در اینصورت:

الف. f روی $R - \{0\}$ پیوسته است.

ب. f فقط روی $A = \left\{ x \mid x = \frac{2}{(2k+1)\pi}, k \in Z \right\}$ پیوسته است.

ج. f روی $R - \{0\}$ پیوسته است و در $x = 0$ ناپیوستگی برداشتنی دارد.

د. f روی R پیوسته است.

۲۰. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2x}$ کدام است؟

الف. صفر ب. ۱ ج. ۲ د. موجود نیست.

نام درس: آنالیز ۱

رشته تحصیلی و کد درس: ریاضی - ۱۱۱۱۰۳۸ - آمار - ۱۱۱۱۰۸۷ - آموزش ریاضی ناپیوسته ۱۱۱۲۸۶

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از: --

مجاز است.

سؤالات تشریحی

* بارم هر سؤال ۲ نمره می باشد.

۱. الف) اگر $\{a_n\}$ دنباله ای از اعداد حقیقی باشد بطوریکه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ آنگاه $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

ب) نشان دهید که اگر $a_n \geq 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد، آنگاه سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ همگرا هستند.

۲. الف) مجموعه فشرده را تعریف کنید. ب) قضیه هاینه - بول را بیان و اثبات کنید.

۳. اگر $\{I_n\}$ دنباله ای نزولی از بازه های بسته و کراندار در \mathbb{R} باشد، ثابت کنید $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$.

۴. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ و تابع $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته یکنواخت و A کراندار باشد ثابت کنید f بر A کراندار است.

۵. فرض کنید f تابعی حقیقی بر $[a, b]$ و f''' (مشتق سوم f) بر این بازه موجود و متناهی باشد. ثابت کنید هرگاه $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$ ، آنگاه نقطه ای چون $c \in (a, b)$ وجود دارد به طوریکه $f'''(c) = 0$.