

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۲۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱. اگر $f: V \rightarrow W$ تابعی خطی بین دو فضای برداری نرمدار باشد. کدام گزاره غلط است؟الف. اگر f در صفر پیوسته باشد، آنگاه f بر V پیوسته است.ب. اگر مجموعه $\left\{ \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} : x \in V - \{0\} \right\}$ کراندار باشد، f بر V پیوسته است.

ج. هر تابع خطی بین دو فضای برداری نرمدار، پیوسته است.

د. اگر مجموعه $\{ \|f(x)\| : \|x\| = 1 \}$ کراندار باشد، f پیوسته است.

۲. کدام گزاره غلط است؟

الف. اگر $f: X \subseteq R^n \rightarrow R^n$ در c مشتق پذیر باشد، $Df(c)$ یک تابع خطی است.ب. اگر $f: R^m \rightarrow R^n$ در این صورت Df تابعی از R^m به $L(R^m, R^n)$ است.ج. اگر $f: R^m \rightarrow R^n$ خطی باشد آنگاه $Df(a) = f$ د. اگر $f: R^m \rightarrow R^n$ خطی باشد آنگاه $Df(a) = f(a)$ ۳. اگر تابع $f: X \subseteq R^m \rightarrow R$ در نقطه c مشتق پذیر باشد، کدام گزینه صحیح است؟ (که U برداری یکه است)الف. $D_U f(c)$ موجود است. ب. $D_U f(c) = Df(c)(U)$ ج. $D_{-U} f(c) = -D_U f(c)$ د. هر سه مورد فوق

۴. کدام گزاره غلط است؟

الف. $f: X \subseteq R^m \rightarrow R$ تابعی مشتق پذیر است آنگاه برای C مناسبی $f(u) - f(v) = Df(c)(u - v)$ ب. $f: X \subseteq R^m \rightarrow R^n$ تابعی مشتق پذیر است آنگاه برای C مناسبی $f(u) - f(v) = Df(c)(u - v)$ ج. اگر $S \subset X \subseteq R^m$ محدب باشد و $f: X \rightarrow R^n$ مشتق پذیر در S باشد

$$\|f(u) - f(v)\| \leq \sup \|Df(x)\| \|u - v\|$$

د. $f: X \subseteq R^n \rightarrow R^n$ در C مشتق پذیر باشد و $Jf(c) \neq 0$ آنگاه δ ای موجود است که اگر $\|h\| < \delta$ و $x \in S$

$$\|f(c+h) - f(c)\| \geq \frac{1}{\|Df(c)^{-1}\|} \|h\|$$

۵. کدام گزاره غلط است؟

الف. هر مجموعه‌ی متناهی دارای اندازه صفر است.

ب. مجموعه اعداد گویای بین صفر و یک دارای اندازه صفر است.

ج. اگر مجموعه‌ی A فشرده و دارای اندازه صفر باشد، دارای قدر صفر است.د. اگر A دارای اندازه صفر باشد، دارای قدر صفر است.

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۲۰ — تشریحی: ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۲۵

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۶. اگر $f: R^m \rightarrow R^n$ بر $X \subseteq R^m$ دو مرتبه مشتق پذیر باشد کدام گزاره غلط است؟الف. $Df: R^m \rightarrow L(R^m, R^n)$ ب. $a \in R^m \quad Df(a): R^m \rightarrow L(R^m, R^n)$ ج. $a \in R^m \quad D^2 f(a) \in L(R^m, L(R^m, R^n))$ د. $a, b \in R^m \quad D^2 f(a)(b) \in L(R^m, R^n)$ ۷. فرض کنید Z یک نقطه درونی $E \subseteq R^n$ ، $f: E \rightarrow R^n$ بر مجموعه‌ی باز Z مشتق پذیر پیوسته باشد و۰. $Jf(z) \neq 0$ کدام گزاره غلط است؟الف. تابع f بر E وارون پذیر است.ب. همسایگی مانند U از Z موجود است که تحدید f بر آن یک یک است.ج. تحدید f بر U وارون پذیر است. (U گفته نشده در بند ص)د. تابع وارون f پیوسته است.۸. اگر $f \in BL(X, Y)$ آنگاه:الف. $N(f)$ زیر فضای X است.ج. f دارای رتبه‌ی صفر است اگر $N(f) = X$

۹. کدام گزینه صحیح است؟

الف. مجموعه‌ی کراندار $E \subset R^n$ دارای قدر صفر است اگر و تنها اگر به ازای هر $\epsilon > 0$ تعداد متناهی بازه بسته بامجموع قدرهای کمتر از ϵ موجود باشد بطوریکه E را بپوشاند.ب. اگر f تابعی بر بازه‌ی بسته E باشد و مجموعه نقاط ناپیوستگی f بر E دارای قدر باشد آنگاه f بر E مشتق پذیر است.ج. یک مجموعه‌ی کراندار در R^n دارای قدر است اگر و تنها اگر مرز آن دارای قدر باشد.

د. الف و ج

۱۰. کدام گزینه صحیح است؟

الف. یک ۱-فرم بسته کامل است.

ب. اگر L یک تابع خطی باشد، dL یک ۱-فرم ثابت است.ج. اگر $M(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ و $N(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ و $w = Mdx + Ndy$ آنگاه w بر $E' - (0,0)$

کامل است.

د. الف و ب صحیح هستند.

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۲۵

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۶۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۱. اگر $w = ydx + z^2dy + x^2ydz$, $n = 3$ کدام گزینه نادرست است؟الف. $dw = d(y) \wedge dx + d(z^2) \wedge dy + d(x^2y) \wedge dz$ ب. $dw = yzdz \wedge dy + yxydx \wedge dz + x^2dy \wedge dz$ ج. $dw = (-x^2 + yz)dz \wedge dy + yxydx \wedge dz$ د. $dw = 0$

۱۲. کدام گزینه غلط است؟

الف. اگر V یک فضای برداری n -بعدی باشد، بعد فضای $\tau^k(V)$ برابر n^k است.ب. k -تانسورهای متناوب زیر فضای $\tau^k(V)$ هستند.ج. اگر $Alt(w) = -w$ آنگاه $w \in A^k(V)$ د. اگر $Alt(T) \in A^k(V)$ آنگاه $T \in \tau^k(V)$ ۱۳. اگر $A \subset R^n$ و w فرم بسته بر A باشد، آنگاه:الف. اگر A باز و ستاره‌گون نسبت به صفر باشد، w کامل است.ب. اگر $w = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ ، آنگاه $dw = 0$ ج. فرم w را بسته گوئیم اگر $dw = 0$

د. هر سه مورد صحیح است.

۱۴. نماینده هر مسیر در R^n یک راه به طوریکه ای می‌باشد.

الف. مشتق‌پذیر

ب. مشتق‌پذیر پیوسته

ج. پیوسته است.

د. پیوسته یکنواخت

۱۵. اثر یک رویه بخشی در R^n ($n > 1$)

الف. همبند است.

ب. فشرده است.

ج. دارای قدر غیر صفر است.

د. دارای قدر صفر است.

۱۶. کدام گزاره غلط است؟

الف. یک مجموعه کراندار در R^n دارای قدر است اگر و فقط اگر مرز آن دارای قدر صفر باشد.ب. اگر $A \subset R^n$ دارای اندازه صفر باشد و $B \subset A$ ، اندازه B صفر است.ج. بازه $[a, b] \subset R$ ، $a < b$ ، دارای قدر صفر است.د. بازه $[a, b] \subset R$ ، $a < b$ ، دارای قدر صفر نیست.

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۲۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۵

۱۷. اگر V یک فضای برداری n بعدی باشد، آنگاه:

الف. بعد فضای $A^k(V)$ برابر $\binom{n}{k}$ است.
ب. بعد فضای $A^k(V)$ برابر n^k است.

ج. $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$ یک مبنا برای $A^k(V)$ است.
د. ب و ج

۱۸. کدام گزینه نادرست است؟

الف. اگر dx^i یک فرمی باشد که به ازای هر x مقدارش e^i گردد، آنگاه $dx^i \wedge dx^j = dx^j \wedge dx^i$

ب. هر تابع حقیقی f را یک 0 -فرم می‌گیریم.

ج. اگر $r > n$ ، تنها یک r -فرم به ازای هر $x \in R^n$ که مقدار آن صفر است موجود است.

د. اگر dx^i ، 1 -فرمی باشد که به ازای هر x مقدارش e^i گردد آنگاه $dx_i \wedge dx_j = e^i \wedge e^j$

۱۹. کدام گزاره صحیح است؟

الف. $\tau^1(V)$ همان V^* است.
ب. $A^k(V)$ زیر فضای $\tau^k(V)$ است.

ج. الف و ب

۲۰. کدام گزاره غلط است؟ (C یک n -زنجیر در A است)

الف. اگر C یک n -زنجیر در A باشد، آنگاه $\partial(\partial C) = 0$ یا $\partial^2 = 0$

ب. اگر $\partial(C) = 0$ همواره زنجیری مانند d وجود دارد که $C = \partial d$

ج. اگر w یک $(k-1)$ -فرم بر مجموعه‌ای باز $A \subset R^n$ و C یک k -زنجیر در A باشد $\int_C dw = \int_C w$

د. اگر $\partial(C) = 0$ در حالت کلی $C \neq \partial d$

سؤالات تشریحی:

۱. اگر E زیرمجموعه‌ای از R^n و $f: E \subset R^n \rightarrow R^n$ بر مجموعه‌ای باز $G \subset E$ مشتق‌پذیر پیوسته باشد و برای هر $x \in G$ ، $Jf(x) \neq 0$ آنگاه $f(G)$ باز است.

۲. اگر $f: R^3 \rightarrow R^2$ بصورت $f(x, y, z) = (yz, xy)$ باشد و $x = a \cos t$ و $y = b \sin t$ و $z = ct$

مقدار انتگرال $\int_{\gamma} f$ را که γ قطعه خط واصل بین $0 \leq t \leq \frac{1}{2}\pi$ است را بدست آورید.

نام درس: آنالیز ریاضی ۳

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۲۵

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۲۰ تکمیلی — تشریحی ۵

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۵

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۳. (قضیه تابع وارون) فرض کنید α یک نقطه درونی E از R^n بوده و فرض کنید تابع $f: E \rightarrow R^n$ در شرایط زیر صدق کند

الف) f بر مجموعه‌ی باز U شامل α مشتق پذیر پیوسته باشد.

ب) $Jf(\alpha) \neq 0$

آنگاه مجموعه‌ی باز U شامل α موجود است که تحدید f بر U یک یک است و تابع وارون φ بر مجموعه باز

$V = f(U)$ مشتق پذیر پیوسته است و اگر $y = f(u)$, $y \in V$ که $x \in U$ آنگاه $D\varphi(y) = [Df(u)]^{-1}$

۴. اگر w یک k -فرم و η یک 1 -فرم باشد آنگاه $d(w \wedge \eta) = dw \wedge \eta + (-1)^k w \wedge d\eta$ همچنین نشان دهید $d(dw) = 0$.

۵. اثر هر منحنی طولپذیر در (R^n) دارای قدر صفر است.