

نام درس: توپولوژی عمومی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۱۱

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۶۰ - تشریحی: ۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۹۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۴

۱. مجموعه  $R$  را با توپولوژی شعاع راست  $T_{\rightarrow}$  در نظر بگیرید کدام گزینه درست است.

الف. بازه  $(a, b)$  تحت توپولوژی  $T_{\rightarrow}$  باز است.

ب. بازه  $[a, b)$  تحت توپولوژی  $T_{\rightarrow}$  بسته است.

ج. بازه  $(a, b]$  تحت توپولوژی  $T_{\rightarrow}$  باز است.

د. بازه  $(a, b)$  تحت توپولوژی  $T_{\rightarrow}$  نه باز است و نه بسته.

۲. فرض کنید  $X$  مجموعه‌ای دلخواه باشد کدام یک از موارد زیر یک پایه برای  $X$  نمی‌باشد.

الف.  $\{X\}$  ب.  $\{\{x\} / x \in X\}$  ج.  $\emptyset$  د.  $P(X)$

۳. اگر  $X$  مجموعه‌ای دلخواه باشد کدام گزاره درست است.

الف. توپولوژی متمم متناهی روی  $X$  از توپولوژی متمم شما را ظریفتر است.

ب. توپولوژی ناگسسته روی  $X$  ظریفترین توپولوژی روی  $X$  است.

ج. توپولوژی گسسته روی  $X$  از همه توپولوژی‌ها ظریفتر است.

د. توپولوژی متمم متناهی و متمم شمارا قابل مقایسه نیستند.

۴.  $R$  را با توپولوژی متمم متناهی در نظر بگیرید در این صورت  $\text{int}((0, 1))$  برابر است با:

الف.  $(0, 1)$  ب.  $\{0, 1\}$  ج.  $\emptyset$  د.  $[0, 1]$

۵. اگر  $C, B, A$  سه زیر فضای یک فضا مانند  $X$  باشند به طوریکه  $C \subseteq A \cup B$  در این صورت:

الف. اگر  $C$  در  $A$  باز باشد در زیر فضای  $A \cup B$  نیز باز است

ب. اگر  $C$  در  $A$  بسته و در  $B$  باز باشد در زیر فضای  $A - B$  بسته است

ج. اگر  $C$  هم در  $A$  و هم در  $B$  باز باشد آنگاه در زیر فضای  $A \cup B$  باز است

د. اگر  $C$  در  $A \cup B$  باز باشد در  $X$  نیز باز است.

۶. زیر فضای  $Y = (0, 1]$  از خط حقیقی  $R$  را در نظر بگیرید بستر مجموعه  $A = (0, \frac{1}{3}) \cup \{\frac{1}{2}\}$  در  $Y$  برابر است با:

الف.  $[0, \frac{1}{3}]$  ب.  $(0, \frac{1}{3}) \cup \{\frac{1}{2}\}$  ج.  $[0, \frac{1}{3}] \cup \{\frac{1}{2}\}$  د.  $(0, \frac{1}{3}] \cup \{\frac{1}{2}\}$

۷. فرض کنید  $X$  یک فضای توپولوژیک و  $A_\alpha$  زیرمجموعه‌هایی از فضای  $X$  باشند کدام یک از گزینه‌های زیر درست است.

الف.  $\overline{\cup A_\alpha} = \cup \overline{A_\alpha}$  ب.  $\overline{\cap A_\alpha} = \cap \overline{A_\alpha}$

ج.  $\cap A_\alpha \subseteq \cap \overline{A_\alpha}$  د.  $\cup A_\alpha \subseteq \cup \overline{A_\alpha}$

تعداد سؤال: ۲۰ نیمی - تشریحی ۶

نام درس: توپولوژی عمومی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۱۱

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی ۹۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۸. فرض کنیم  $X = R$  و متریک  $d : X \times X \rightarrow R$  را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم.

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y| + 1 & \text{اگر یک و تنها یکی از } x \text{ و } y \text{ مثبت باشد} \\ |x - y| & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در این صورت  $B(1, 2)$  (گوی به مرکز ۱ و به شعاع ۲) برابر است با:

الف.  $(-1, 3)$  ب.  $[0, 3]$  ج.  $(0, 2)$  د.  $(0, 3)$

۹. فرض کنیم  $X$  و  $Y$  فضا‌های توپولوژیک و  $f : X \rightarrow Y$  یک تابع باشد کدام یک از گزینه‌های زیر معادل پیوستگی نمی‌باشد.

الف. به ازای هر زیرمجموعه بسته  $Y$  باشد  $f^{-1}(F)$  در  $X$  بسته است.

ب. به ازای هر زیرمجموعه  $Y$  مانند  $B$ ،  $f^{-1}(B) \subseteq \overline{f^{-1}(B)}$

ج. به ازای هر زیرمجموعه  $X$  مانند  $A$ ،  $f(A) \subseteq \overline{f(A)}$

د. به ازای هر مجموعه باز  $Y$  مانند  $G$ ،  $f^{-1}(G)$  در  $X$  باز است.

۱۰. فرض کنیم  $R$  مجموعه اعداد حقیقی با توپولوژی معمولی در آن باشد کدام یک از توابع زیر پیوسته‌اند.

الف.  $f : R \rightarrow R_u$

ب.  $f : R \rightarrow R_L$

ج.  $f(x) = x$

د.  $f(x) = x$

الف.  $f : R_u \rightarrow R_L$

ب.  $f : R_L \rightarrow R$

ج.  $f(x) = x$

د.  $f(x) = x$

۱۱. فرض کنیم  $X$  و  $Y$  دو مجموعه باشند و  $f : X \rightarrow Y$  تابعی بتوی  $Y$  باشد و  $T$  توپولوژی گسسته روی  $X$  توپولوژی القایی  $f$  بر  $X$ :

الف. گسسته است

ب. ناگسسته است

ج. در صورتیکه  $f$ ، یک به یک و پوشا باشد گسسته است

د. در صورتیکه  $f$  پوشا باشد گسسته است

۱۲. کدام یک از فضا‌های زیر، یک فضای توپولوژیک فشرده است.

الف.  $[0, 1]$  با توپولوژی متمم شما را

ب.  $(0, 1)$  با توپولوژی معمولی  $R$

ج.  $(0, 1)$  با توپولوژی متمم متناهی

د.  $[0, 1)$  با توپولوژی معمولی  $R$

۱۳. کدام یک از فضا‌های زیر موضعاً فشرده نیست.

الف.  $R$  با توپولوژی معمولی

ب.  $Q$  با توپولوژی گسسته

ج.  $Q$  با توپولوژی متناهی

د.  $R$  با توپولوژی متمم شما را

نام درس: توپولوژی عمومی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۱۱

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۶ - تشریحی

زمان امتحان: تئوری و تکمیلی

[ استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۴

۱۴. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است.

الف. هر زیرفضای یک فضای توپولوژیک فشرد، فشرد است.

ب. هر زیرمجموعه بسته یک فضای توپولوژیک فشرد، فشرد است.

ج. هر زیرمجموعه فشرد یک فضای توپولوژیک بسته است.

د. هر گام  $X$  متناهی باشد فضای گسسته  $X$  فشرد است.

۱۵. فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  و  $g: Y \rightarrow Z$  دو تابع باشند کدام گزینه نادرست است.

الف. اگر  $X$  یک فضای توپولوژیک گسسته باشد  $g \circ f$  پیوسته است.

ب. اگر  $Z$  یک فضای توپولوژیک ناگسسته باشد  $g \circ f$  پیوسته است.

ج. اگر  $Y$  یک فضای توپولوژیک گسسته باشد  $g \circ f$  پیوسته است.

د. اگر  $g$  تناظری  $1-1$  و پیوسته و  $f$  باز باشد  $g \circ f$  نیز باز است.

۱۶. مجموعه اعداد گویای  $Q$  تحت کدام توپولوژی همبند است.

الف. متمم شما را ب. زیر فضای  $R$  ج. ناگسسته

د. متمم متناهی

۱۷. اگر  $(X, T)$  یک فضای توپولوژیک و  $A$  و  $B$  زیر مجموعه‌های همبند آن باشند کدام یک از فضاهای زیر همبندند.

الف.  $A \cup B$  ب.  $\partial A$  ج.  $B - \partial B$  د.  $\text{int } A \cup \partial A$

۱۸. کدام یک از گزینه‌های زیر درست است.

الف. هر فضای همبند، موضعاً همبند است.

ب. هر فضای موضعاً همبند، همبند است.

ج. اگر  $f: X \rightarrow Y$  یک تابع پیوسته و  $X$  موضعاً همبند باشد  $Y$  نیز موضعاً همبند است.

د. فضای متمم متناهی، موضعاً همبند است.

۱۹. کدام یک از فضاهای زیر در دومین اصل شمارایی صدق نمی‌کند.

الف. فضای گسسته  $X$  که در آن شمار است ب. فضای متمم متناهی  $X$  که در آن شمار است.

ج. فضای  $R_L$  ( $R$  با توپولوژی حد پائینی) د.  $R$  با توپولوژی معمولی

۲۰. کدام یک از گزینه‌های زیر نادرست است.

الف. هر فضای متری لزوماً یک فضای  $T_4$  نیست.

ب. هر فضای منظم و لنیدلوف یک فضای نرمال است.

ج. هر فضای فشرد یک فضای  $T_3$  است.

د. هر فضای منظم که در دومین اصل شمارایی صدق می‌کند نرمال است.

نام درس: توپولوژی عمومی

رشته تحصیلی: گرایش: ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۱۱

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۶

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۹۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۴

### سوالات تشریحی

به دلخواه به پنج سوال پاسخ دهید.

۱. اگر  $X$  نا شمارا و  $T$  توپولوژی متمم شما را باشد نشان دهید که  $(X, T)$  نمی تواند پایه شما را داشته باشد.

۲. فرض کنید  $\{X_i\}_{i=1}^n$  خانواده متناهی از فضاها باشد و به ازای هر  $i$ ،  $C_i \subseteq X_i$  در این صورت در فضای  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  ثابت کنید  $\overline{C_1 \times C_2 \times \dots \times C_n} = \overline{C_1} \times \overline{C_2} \times \dots \times \overline{C_n}$

۳. الف) اگر  $A$  زیرمجموعه همبندی از فضای  $X$  باشد آیا  $\text{int } A$  نیز همبند است.  
ب) مثالی از یک تابع باز بیاورید که تحلیل آن باز نباشد.

۴. فرض کنیم  $f: X \rightarrow Y$  تابعی پیوسته باشد و  $X$  فضای فشرده، نشان دهید نمودار  $f$  یعنی  $G_f = \{(x, f(x)) / x \in X\}$  زیرمجموعه فشرد  $X \times Y$  است.

۵. نشان دهید هر فضای متریک فضای  $T_3$  است.

۶. اگر فضای  $X$  همبند راهی باشد در این صورت  $X$  همبند است.