

نام درس: آنالیز عددی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۲۶۳۳۱۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ نمره تشریحی ۷۰ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱. هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ باشد، کدامیک از گزینه‌های زیر درست می‌باشد؟الف. هرگاه A دارای یک سطر و یک ستون یکسان باشد، آنگاه $\det A = 0$ است.ب. هرگاه B نیز یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه $\det(AB)^t = \det A + \det B$ ج. هرگاه $\det A \neq 0$ باشد، آنگاه $\det A = \det A^{-1}$ د. همیشه داریم $\det A = \det A^t$ ۲. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 4/25 & 2/75 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشد. در مورد ماتریس A چه می‌توان گفت؟الف. A معین مثبت است.ب. A وارونپذیر نیست ولی غالب قطری است.ج. A یک ماتریس نواری و $\rho(A) = -2$ است.

د. همه موارد صحیح می‌باشد.

۳. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4/25 & 2/75 \\ 1 & 2/75 & 3/5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. در روش چولسکی کدامیک از موارد ذیل درست است؟الف. $L_{11} = u_{11} = 1$ ب. $L_{11} = 1, u_{11} = 4$ ج. $L_{11} = u_{11} = 2$ د. $L_{11} = 4, u_{11} = 1$

۴. کدامیک از ماتریسهای زیر همگرا می‌باشند؟

الف. $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ۵. هرگاه T_g, T_j به ترتیب ماتریسهای تکرار برای روشهای ژاکوبی و گاوس-سیدل باشند و به ازای هر $j \neq i$ ، $a_{ij} \leq 0$ و به ازای $i = 0, 1, \dots, n$ ، $a_{ii} > 0$ باشد، آنگاه:الف. $0 < \rho(T_j) < \rho(T_g) < 1$ ب. $1 < \rho(T_j) < \rho(T_g)$ ج. $\rho(T_j) = 0, \rho(T_g) = 1$ د. موارد الف و ب صحیح است.۶. مقادیر ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ عبارتند از: $\lambda = 0, 0, -2, 20$ ، دترمینان ماتریس A چقدر است؟الف. صفر ب. ۱۸ ج. -۴۰ د. $\frac{1}{40}$

نام درس: آنالیز عددی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۲۶۳۳۱۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ نمره تشریحی ۷۰ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۷. دستگاه خطی $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$ را در نظر بگیرید. ماتریس تکرار روش گاوس - سیدل کدام است؟

الف. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ب. $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ ج. $\begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix}$ د. $\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

۸. ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. اگر $y^{(0)} = (1, 0, 0)$ باشد. (با استفاده از $\| \cdot \|_\infty$) $x^{(2)}$ روش توانی کدام گزینه است؟

الف. $\frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ ب. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ج. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ د. $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

۹. با بکار بردن الگوریتم هاوس هولدر برای ماتریس $\begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ خواهیم داشت؟

الف. $r^2 = 4$ ب. $S = 9$ ج. $q^2 = 9$ د. $r = 6$

۱۰. کدامیک از گزینه‌های زیر صحیح است؟

الف. الگوریتم QR را برای یافتن یک ماتریس سه قطری استفاده می‌کنیم.

ب. الگوریتم هاوس هولدر برای یافتن مقادیر ویژه یک ماتریس سه قطری متقارن بکار می‌رود.

ج. هر گاه p_1, p_2, \dots, p_n ماتریسهای متعامد باشند، آنگاه $Q = p_1 p_2 \dots p_n$ نیز متعامد است.

د. الگوریتم QR همان الگوریتم هاوس هولدر است.

نام درس: آنالیز عددی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۲۶۳۳۱۳

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ نمره تشریحی ۷۰ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

۱۱. کدام گزینه فرمول تفاضل مرکزی را بیان می‌دارد؟

الف. $y''(x_i) = \frac{1}{h^2} [y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1}))]$

ب. $y'(x_i) = \frac{1}{2h} [y(x_{i+1}) - y(x_{i-1}))]$

ج. $y'(x_i) = \frac{1}{2h} [y(x_{i-1}) + y(x_{i+1}))]$

د. موارد الف و ب

۱۲. فرمول تفاضل مرکزی برای مشتق مرتبه دوم، دارای خطای برشی از چه مرتبه‌ای می‌باشد؟

الف. $O(h^2)$

ب. $O(h)$

ج. $O(h^3)$

د. $O(h + h^2)$

۱۳. کدام گزینه درست است؟

الف. معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ می‌باشد که همان معادله بیضوی است.

ب. معادله پواسن $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$ می‌باشد که همان معادله سهموی است.

ج. معادله دیریکله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ است که به معادله هذلولوی معروف می‌باشد.

د. معادله لاپلاس $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k$ است که همان معادله بیضوی می‌باشد.

۱۴. کدامیک از فرمولهای تفاضلی زیر را می‌توان برای حل معادله دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ بکار برد؟

الف. $\frac{w_{ij} - w_{i(j-1)}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{(i+1)j} - 2w_{ij} + w_{(i-1)j}}{h^2} = 0$

ب. $\frac{w_{i(j+1)} - w_{ij}}{k} - \alpha^2 \frac{w_{(i+1)j} - 2w_{ij} + w_{(i-1)j}}{h^2} = 0$

ج. $\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2k} - \alpha^2 \frac{w_{(i+1)j} - 2w_{ij} + w_{(i-1)j}}{h^2} = 0$

د. هر سه مورد را می‌توان بکار برد.

نام درس: آنالیز عددی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۲۶۳۳۱۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

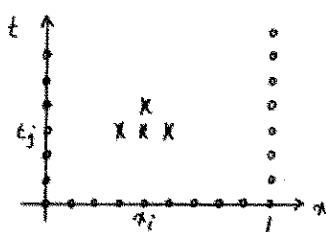
زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ نمره تشریحی ۷۰ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

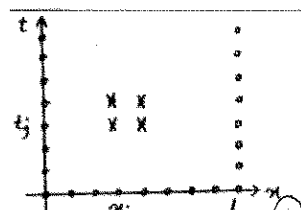
تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

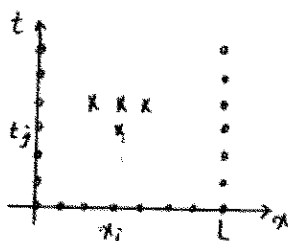
۱۵. کدامیک از اشکال زیر شکل شبکه‌ای روش تفاضلی پیشرو را نشان می‌دهد؟



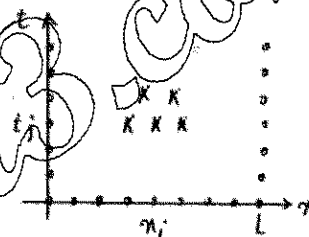
ب.



الف.



د.



ج.

۱۶. کدام گزینه صحیح است؟

الف. روش کرانک - نیکلسون پایدار مشروط و دارای مرتبه همگرایی $O(h^p + k^p)$ است.ب. روش کرانک - نیکلسون پایه غیر مشروط و دارای مرتبه همگرایی $O(h^p + k^p)$ است.ج. روش تفاضلی پسرو یک روش ضمنی پایدار مشروط و از مرتبه همگرایی $O(h + k)$ است.د. روش تفاضلی پسرو یک روش ضمنی پایدار غیر مشروط و از مرتبه همگرایی $O(h + k^p)$ است.

$$۱۷. معادله دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1$ ، معادله چه منحنی می‌باشد؟$$

الف. معادله بیضوی ب. معادله سهموی ج. معادله هذلولوی د. هیچ معادله مشخصی نیست.

$$۱۸. جهت‌های مشخص معادله دیفرانسیل جزئی $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \gamma$ کدام است؟$$

$$ب. m_1(p) = 1, m_p(p) = -\frac{p}{3}$$

$$الف. بدون جهت \quad m_1(p) = m_p(p)$$

$$د. m_1(p) = \frac{p}{3}, m_p(p) = -1$$

$$ج. m_1(p) = m_p(p) = \frac{1}{6}$$

نام درس: آنالیز عددی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۲۶۳۳۱۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ نمره تشریحی ۷۰ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۹. روش عناصر متناهی دارای کدامیک از خواص زیر باید باشد؟

الف. ناحیه‌ای را به تعدادی متناهی قسمت یا عنصر تقسیم کرده و مجموعه توابعی که برای تقریب بکار می‌رود یک مجموعه از قطعه قطعه چند جمله‌ایهای با درجه ثابت از X , Y است.

ب. چند جمله‌ایهای قسمت الف به گونه‌ای سرهم می‌شوند که تابع حاصل پیوسته با مشتق اول یا دوم پیوسته یا انتگرالپذیر روی تمام ناحیه باشد.

ج. چند جمله‌ایهای قسمت الف به گونه‌ای سرهم می‌شوند که تابع حاصل پیوسته و مشتقپذیر باشد.

د. در این روش از چند جمله‌ایهایی استفاده می‌شود که به طور پیوسته مشتقپذیر و انتگرالپذیر باشند.

۲۰. چند جمله‌ایهای روش عناصر متناهی از چه نوعی و به چه صورتی می‌توانند باشند؟

الف. از نوع خطی $\phi(x, y) = ax + by$ و نوع دو خطی $\phi(x, y) = a + bx + cy$ ب. از نوع خطی $\phi(x, y) = a + bx$ و نوع دو خطی $\phi(x, y) = ax + by + c$ و نوع شبه خطی $\phi(x, y) = a$ ج. از نوع خطی $\phi(x, y) = bx + cy$ و نوع شبه خطی $\phi(x, y) = a + bxy$ د. از نوع خطی $\phi(x, y) = a + bx + cy$ و نوع دو خطی $\phi(x, y) = a + bx + cy + dxy$

سوالات تشریحی

۱. الف) فرض کنید X یک ماتریس مربعی بصورت: $X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ باشد که در آن A و D ماتریسهای مربع می‌باشند و A^{-1} موجود است. می‌دانیم که X^{-1} وجود دارد اگر و فقط اگر $(D - CA^{-1}B)^{-1}$ وجود داشته باشد. تحقیق کنید که X^{-1} به صورت زیر ارائه می‌گردد.

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}B \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ O & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}$$

ب) با استفاده از قسمت الف، وارون ماتریس زیر را بیابید.

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نام درس: آنالیز عددی ۲

رشته تحصیلی: گرایش: علوم کامپیوتر

کد درس: ۲۶۳۳۱۳

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

تعداد سؤال: هفتاد و پنج - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۵۰ دقیقه تشریحی ۷۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز است] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۶

۳. اگر بزرگترین مقدار ویژه ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ عدد ۶ باشد، با استفاده از روش تقلیل ویلاند بقیه مقادیر

ویژه را محاسبه کنید.

۴. الگوریتم تفاضل متناهی غیر خطی را برای مسئله مقدار مرزی

$$\begin{cases} y'' = -\frac{4}{x}y' + \frac{2}{x^2}y - 2\frac{\ln x}{x^2}, 1 < x < 2 \\ y(1) = -\frac{1}{2} \text{ و } y(2) = \ln 2 \end{cases}$$

را با

$h = 0.05$ بکار ببرید.

(فقط فرمول تفاضل متناهی آنرا مشخص کرده و مقادیر N و M را مشخص کنید.)

۵. روش کرانک - نیکلسون را برای تقریب جواب مسئله $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ با شرایط $u(0, t) = u(1, t) = 0$ و $u(x, 0) = \sin \pi x$ $0 \leq x \leq 1$ بکار ببرید. $h = 0.1$ (با انتخاب $k = 0.1$ و $\lambda = 1$)