

نام درس: آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد درس: ۲۵۰۱۷۹

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱. کدام گزینه خاصیت ارشمیدسی اعداد را بیان می کند؟

- الف. $\exists x > 0, \forall y, \exists n \in \mathbb{N}; nx < y$
ب. $\exists x > 0, \exists y, \forall n \in \mathbb{N}; nx < y$
ج. $\forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}; nx > y$
د. $\forall x > 0, \exists y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}; nx > y$

۲. فرض کنید $A \subseteq \mathbb{R}$ نا تهی و از پایین کراندار باشد آنگاه $\beta = \inf A$ اگر و فقط اگر

- الف. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A; x > \beta - \varepsilon$
ب. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A; x > \beta + \varepsilon$
ج. $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A; x < \beta - \varepsilon$
د. $\exists \varepsilon > 0, \forall x \in A; x \geq \beta + \varepsilon$

۳. هرگاه $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$ آنگاه $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ برابر است با:

- الف. ۲
ب. -۲
ج. ۱
د. -۱

۴. طبق قضیه تراکم کوشی، در چه صورت رفتار دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ از نظر همگرایی یکسان است؟

- الف. $\{a_n\}$ نزولی باشد.
ب. $\{a_n\}$ نزولی و نامنفی باشد.
ج. $\{a_n\}$ صعودی و همگرا به صفر باشد.
د. $\{a_n\}$ صعودی و نامنفی باشد.

۵. کدام سری همگراست؟

- الف. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$
ب. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$
ج. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$
د. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

۶. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!}$ همگراست به:

- الف. $e+1$
ب. $e-1$
ج. $2e+1$
د. $2e-1$

۷. اگر (M, d) یک فضای متریک باشد آنگاه کدام گزینه نادرست است؟

- الف. اجتماع هر خانواده از مجموعه های باز، باز است.
ب. اجتماع متناهی از مجموعه های بسته، بسته است.
ج. اجتماع هر خانواده از مجموعه های بسته، بسته است.
د. اشتراک متناهی از مجموعه های باز، باز است.

تعداد سؤال: ۲۰ نیمی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد درس: ۲۵۰۱۷۹

زمان امتحان: تستی و تشریحی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۸. کدام گزینه درست است؟

الف. مجموعه $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ بسته است.ب. اگر $A = \left\{ \frac{k}{2^n} : 1 \leq k \leq 2^n, n \in \mathbb{N} \right\}$ آنگاه $A' = (0, 1)$ ج. در R هر مجموعه باز یک بازه می باشد.د. در R هر مجموعه باز اجتماع شمارش پذیری از بازه های باز می باشد.۹. فرض کنید (M, d) یک فضای متریک و $E \subseteq M$ باشد. در این صورت کدام نادرست است؟الف. E فشرده است اگر و فقط اگر کراندار کلی و کامل باشد.ب. E فشرده است اگر و فقط اگر بسته و کراندار باشد.ج. E فشرده است اگر و فقط اگر هر پوشش باز E دارای یک زیر پوشش متناهی باشد.د. E فشرده است اگر و فقط اگر هر زیر مجموعه نامتناهی E دارای حداقل یک نقطه انباشتگی در E باشد.۱۰. اگر اعداد گویا را با Q نمایش دهیم آنگاه با متریک معمولی کدام گزینه درست است؟الف. Q کامل است.ب. Q در R بسته است.د. $Q' = R$ ج. Q در R باز است.۱۱. اگر (M, d) یک فضای متریک کامل باشد آنگاه:الف. همه زیر فضاهای M کامل هستند.ب. هر گاه هر O_n در M باز و چگال باشد، آنگاه $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n = \emptyset$ ج. هر دنباله کوشی در M همگراست.د. M را می توان بصورت اجتماعی شمارا از مجموعه های هیچ جا چگال نوشت.۱۲. فرض کنید A, B زیر مجموعه هایی از R باشند. در این صورت:الف. اگر A همبند باشد، $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ ، آنگاه B نیز همبند است.ب. اگر B همبند باشد و $A \subseteq B$ ، آنگاه A نیز همبند است.ج. اگر A_1, A_2 همبند باشند و $A_1 \subseteq B \subseteq A_2$ ، آنگاه B نیز همبند است.د. اگر A, B همبند باشند، آنگاه $A \cup B$ نیز همبند است.

نام درس: آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد درس: ۲۵۰۱۷۹

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۶۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ نمره تشریحی ۶۰ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست] ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۳. کدام نادرست است؟

الف. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ در هیچ نقطه‌ای دارای حد نیست.

ب. $f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ 1-x & x \notin Q \end{cases}$ فقط در $x_0 = \frac{1}{2}$ دارای حد است.

ج. $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in Q \\ \cos x & x \notin Q \end{cases}$ در همه نقاط دارای حد است.

د. $f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ در صفر دارای حد است.

۱۴. فرض کنید X, Y دو فضای متریک و تابع $f: X \rightarrow Y$ پیوسته باشد. در اینصورت:الف. اگر X در V باز باشد آنگاه $f(V)$ در Y باز است.ب. اگر F در X بسته باشد آنگاه $f(F)$ در Y بسته است.ج. اگر F در Y فشرده باشد آنگاه $f^{-1}(F)$ در X فشرده است.د. اگر F در X فشرده باشد آنگاه $f(F)$ در Y فشرده است.۱۵. فرض کنید f یک تابع حقیقی و پیوسته بر فضای فشرده X باشد. در اینصورت:الف. اگر f یک به یک باشد آنگاه f^{-1} نیز پیوسته است.ب. تابع f ، سوپرمم و اینفیموم خود را در نقاطی از X می‌گیرد.ج. مجموعه $f(X)$ کراندار کلی است.

د. هر سه مورد فوق صحیح است.

۱۶. کدامیک از توابع زیر بر مجموعه داده شده بطور یکنواخت پیوسته نیست؟

ب. $f(x) = x^2$ بر $(0, 1]$

الف. $f(x) = \frac{1}{x}$ بر $(0, 1]$

د. $f(x) = \sin x$ بر R

ج. $f(x) = x - 5$ بر R

۱۷. کدام تابع در صفر مشتق‌پذیر است؟

ب. $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in Q \\ -x^2 & x \notin Q \end{cases}$

الف. $f(x) = \begin{cases} x & x \in Q \\ -x & x \notin Q \end{cases}$

د. $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

ج. $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آنالیز ریاضی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار

کد درس: ۲۵۰۱۷۹

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[استفاده از ماشین حساب مجاز نیست ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲-۸۳

۱۸. فرض کنید تابع حقیقی f بر R تعریف شده باشد و به ازای هر دو عدد حقیقی x, y ، داشته باشیم

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$$

$$\text{الف. } f'(a) > 0 \quad \text{ب. } f'(a) < 0 \quad \text{ج. } f'(a) = 0 \quad \text{د. } f''(a) = 0$$

۱۹. کدام صحیح است؟

الف. هر گاه تابع حقیقی f بر $[a, b]$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f' بر $[a, b]$ ناپیوستگی ساده ندارد.ب. هر گاه تابع حقیقی f در (a, b) ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد آنگاه $f'(c) = 0$.ج. هر گاه تابع برداری f بر $[a, b]$ مشتق پذیر باشد آنگاه $c \in (a, b)$ وجود دارد بطوریکه

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

د. قاعده هوییتال برای توابع برداری مانند توابع حقیقی قابل استفاده است.

$$20. \text{ فرض کنید } f(x) = \begin{cases} g(x) \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \quad \text{و } g(0) = g'(0) = 0 \text{ در اینصورت:}$$

الف. f در صفر پیوسته نیست.ب. f در صفر مشتق پذیر نیست.

$$\text{ج. } f'(0) = 0$$

$$\text{د. } f'(0) = 1$$

سوالات تشریحی:

$$1. \text{ ثابت کنید } e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \text{ عددی اصم است.}$$

۲. الف. فرض کنید d تابعی حقیقی بر $X \times X$ باشد. در چه صورت d را یک متریک روی X می نامیم.ب. ثابت کنید در فضای متریک (X, d) ، حد هر دنباله منحصر بفرد است.۳. ثابت کنید هر زیر مجموعه بسته و کراندار R^k فشرده است (قضیه هانیه - بورل).۴. فرض کنید تابع $f: [a, b] \rightarrow R$ پیوسته و $f(a)f(b) < 0$ باشد. ثابت کنید $c \in (a, b)$ وجود دارد بطوریکه $f(c) = 0$.۵. فرض کنید f تابعی حقیقی بر $[a, b]$ باشد که به ازای هر $x \in (a, b)$ ، $f'''(x)$ موجود باشد و

$$f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0 \quad \text{ثابت کنید } c \in (a, b) \text{ وجود دارد که } f'''(c) = 0.$$