

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

نام درس: آمار ریاضی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار - ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۸۸ - ۲۵۰۱۶۳

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز است ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۴

نیمسال دوم ۸۲ - ۸۳

۱. فرض کنید  $X_1, X_p$  دو متغیر تصادفی مستقل و دارای توزیع نرمال استاندارد باشند اگر  $y_p = \frac{x_p}{x_1}$  باشند آنگاه تبدیل  $y_1 = x_1 + x_p$

ژاکوبین کدام است؟

الف.  $\frac{y_1 y_p}{1 + y_p}$  ب.  $\frac{y_1 y_p}{1 + y_p}$  ج.  $\frac{-y_1}{(1 + y_p)^2}$  د.  $\frac{y_1 y_p}{(1 + y_p)^2}$

۲. اگر  $X, Y$  دو متغیر تصادفی مستقل از هم بترتیب دارای توزیعهای گامای  $\Gamma(n_1, \theta), \Gamma(n_p, \theta)$  باشند، توزیع  $\frac{X}{X+Y}$  کدامست؟

الف. نمایی ب.  $Beta(n_p, n_1)$  ج.  $Beta(n_1, n_p)$  د. یکنواخت

۳. اگر متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع  $f(x) = \theta x^{\theta-1} I(x)$  باشد توزیع  $y = \ln x$  کدام است؟

الف. نمایی ب. کای دو ج. یکنواخت د. نرمال استاندارد

۴. اگر نمونه تصادفی  $X_1, X_p, \dots, X_n$  از چگالی نمایی  $f(x) = \theta e^{-\theta x} I(x)$  باشند آن گاه میانگین نمونه‌ای دارای

کدام توزیع است؟

الف. نهائی با پارامتر  $\theta$  ب. نرمال با پارامتر  $\theta, \frac{\theta}{n}$  ج. گاما با پارامتر  $n\theta, n$  د. خی دو با پارامتر  $\theta$

۵. متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع پیوسته و صعودی  $F(x)$  است فرض کنید  $y = (F(x))^p$  باشد واریانس متغیر  $Y$  کدام است؟

الف.  $\frac{2}{\sqrt{45}}$  ب.  $\frac{4}{45}$  ج.  $\frac{5}{45}$  د.  $\frac{1}{3}$

۶. فرض کنید  $X_1, X_p, X_p \sim U(0,1)$  امید ریاضی میانه نمونه کدام است؟

الف. صفر ب.  $\frac{1}{p}$  ج. ۱ د. ۳

۷. فرض کنید  $X_1, X_p \sim N(0,1)$  باشد نسبت تصادفی  $U = \frac{(x_1 + x_p)}{\sqrt{(x_1 - x_p)^2}}$  را در نظر بگیرید  $U$  متغیری تصادفی که

دارای توزیع ..... و ..... درجه آزادی است؟

الف.  $t$  با دو ب.  $t$  با یک ج. خی دو با یک د. خی دو با دو

۸. اگر  $X_1, X_p, \dots, X_n \sim U\{1, 2, 3, \dots, \theta\}$  شد آنگاه برآورد گشتاوری  $\theta$  کدام است؟

الف.  $\bar{x}$  ب.  $p\bar{x}$  ج.  $p\bar{x} - 1$  د.  $p\bar{x} + 1$

نام درس: آمار ریاضی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار - ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۸۸ - ۲۵۰۱۶۳

نیمسال دوم ۸۲ - ۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز است ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۴

۹. در سؤال ۸ برآورد درستنمایی ماکزیمم برای  $\theta$  کدام است؟

$$\frac{1 + \min_{i=1}^n x_i}{2} \quad \text{د.}$$

$$\max_{i=1}^n x_i \quad \text{ج.}$$

$$\min_{i=1}^n x_i \quad \text{ب.}$$

$$\bar{x} \quad \text{الف.}$$

۱۰. اگر  $F(x)$  توزیع پیوسته و صعودی  $F(x)$  بطور تکرار نمونه‌های تصادفی  $n$  تایی استخراج نمائیم، امید ریاضی سمت چپ کوچکترین مشاهده در زیر نمودار  $f(x)$  کدامست؟  $(F'(x) = f(x))$

$$\frac{1}{n} \quad \text{الف.}$$

$$\frac{1}{n+1} \quad \text{ج.}$$

$$\frac{1}{2} \quad \text{ب.}$$

$$\frac{1}{n} \quad \text{الف.}$$

۱۱. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim N(\theta, \theta)$  باشد. آماره بسنده مینیمال برای  $\theta$  کدام است؟

$$(\sum x_i, \sum x_i^2) \quad \text{د.}$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{ج.}$$

$$\sum x_i^2 \quad \text{ب.}$$

$$\sum x_i \quad \text{الف.}$$

۱۲. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{bin}(n, p)$  و  $p$  پارامتر مجهول باشد. برآورد درستنمایی تابع احتمال  $p(X_1 = x)$  کدام است؟

$$\binom{n}{x} \left(\frac{\bar{x}}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\bar{x}}{n}\right)^{n-x} \quad \text{الف.}$$

$$\binom{\bar{x}}{x} (\bar{x})^x (1 - \bar{x})^{n-\bar{x}} \quad \text{ب.}$$

$$\binom{x}{n} (\bar{n})^{\bar{x}} (1 - n)^{n-\bar{x}} \quad \text{ج.}$$

$$\frac{e^{-\bar{x}} \bar{x}^x}{x!} \quad \text{د.}$$

۱۳. فرض کنید  $(X_1, X_2)$  دارای تابع احتمال توأم زیر باشند  $(0 < \theta < 1)$ 

$(x_1, x_2)$	(۰, ۰)	(۰, ۱)	(۱, ۰)	(۱, ۱)
$f_\theta(x_1, x_2)$	$\frac{\theta}{4}$	$\frac{1-\theta}{4}$	$\frac{1-\theta}{4}$	$\frac{\theta}{4}$

کدام گزینه یک آماره بسنده برای  $\theta$  است؟

$$x_1 + x_2 \quad \text{د.}$$

$$x_1 - x_2 \quad \text{ج.}$$

$$x_1(1 - x_2) \quad \text{ب.}$$

$$x_1, x_2 \quad \text{الف.}$$

۱۴. کدامیک از خانواده چگالیهای زیر کامل است؟

$$\text{Beta}(\theta, \theta) \quad \text{د.}$$

$$U(0, \theta) \quad \text{ج.}$$

$$\text{دو جمله‌ای} \quad \text{ب.}$$

$$N(0, \theta) \quad \text{الف.}$$

نام درس: آمار ریاضی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار - ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۸۸ - ۲۵۰۱۶۳

نیمسال دوم ۸۲ - ۸۳

تعداد سؤال: ۲۰ نمره: ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ نمره تشریحی ۶۰ نمره

[استفاده از ماشین حساب مجاز است ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد]

تعداد کل صفحات: ۴

۱۵. فرض کنید  $x_1, \dots, x_n \sim f(x; \theta)$  iid که در آن  $\theta > 0$ ؛  $f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} I_{[\theta, 2\theta]}(x)$  برآوردگر درست‌نمایی

ماکزیم  $\theta$  کدام است؟

الف.  $\frac{Max x_i}{2}$  ب.  $Min x_i$  ج.  $\frac{Min x_i + Max x_i}{2}$  د.  $\frac{Min x_i}{2}$

۱۶. فرض  $X \sim N(1, 1)$  باشد آنگاه  $var(e^X)$  کدام است؟

الف.  $e(e-1)$  ب.  $e(e^3-1)$  ج. صفر د.  $e^3(e-1)$

۱۷. فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_n$  یک نمونه تصادفی از  $I_{(\alpha, \infty)}^{(x)}$  باشد که  $\theta = (\alpha, \beta)$  یک آماره کافی

برای  $\theta$  کدام است.  $y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ،  $x_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

الف.  $\sum_{i=1}^n x_i$  ب.  $\sum_{i=1}^n x_i$  ج.  $\left( y_1, \sum_{i=1}^n x_i \right)$  د.  $(y_1, y_n)$

۱۸. هرگاه  $x_1, \dots, x_n$  نمونه‌ای تصادفی از پواسن با پارامتر  $\lambda$  باشد برآوردگر  $UMVUE$  برای  $\lambda^2$  کدام است؟

الف.  $\bar{X}$  ب.  $\bar{X}^2$  ج.  $\bar{X}^2 + \frac{\bar{X}}{n}$  د.  $\frac{n\bar{X}^2 - \bar{X}}{n}$

۱۹. در سؤال ۱۸ کران پائین نامساوی کرامر-رائو برای واریانس برآوردهای ناریب  $\tau(\lambda) = e^{-\lambda}$  کدام است؟

الف.  $\frac{\lambda}{n} e^{-2\lambda}$  ب.  $\frac{\lambda^2}{n} e^{-2\lambda}$  ج.  $\frac{\lambda}{n} e^{-3\lambda}$  د.  $\frac{\lambda}{n} e^{-\lambda}$

۲۰. فرض کنید  $x_1, \dots, x_n \sim u(\theta, \theta+1)$  باشد برآورد  $UMVUE$  برای  $\theta$  کدام است؟

الف.  $\bar{X}$  ب.  $\frac{Min X_i + Max X_i}{2} - \frac{1}{2}$  ج.  $\frac{Max X_i - Min X_i + 1}{2}$  د. وجود ندارد.

نام درس: آمار ریاضی ۱

رشته تحصیلی: گرایش: آمار - ریاضی

کد درس: ۲۴۱۲۸۸ - ۲۵۰۱۶۳

نیمسال دوم ۸۲ - ۸۳

تعداد سؤال: هفتی ۲۰ تکمیلی - تشریحی ۵

زمان امتحان: تستی و تکمیلی ۶۰ دقیقه تشریحی ۶۰ دقیقه

[ استفاده از ماشین حساب مجاز است ☆ سوالات تستی نمره منفی دارد ]

تعداد کل صفحات: ۴

سوالات تشریحی:۱. فرض کنید  $X, Y$  متغیرهای تصادفی مستقل و هریک دارای توزیع یکنواخت روی بازه  $(0, 1)$  باشند مطلوب است توزیعالف.  $Z = X + Y$ ب.  $U = \frac{X}{Y}$ ۲. متغیر تصادفی  $X$  دارای چگالی زیر است

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x & x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{سایر جاها} \end{cases}$$

چگالی  $Y = X^2$  و چگالی  $Z = (-1)^X$  را محاسبه کنید.

$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \end{cases}$$

۳. فرض کنید  $x_1, x_2, x_3$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع نرمال استاندارد باشند هرگاه تعریف کنیم

مطلوب است:

الف. ژاکوبین تبدیل

ب. تابع چگالی توام  $y_1, y_2, y_3$ ۴. فرض کنید  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع یکنواخت روی بازه  $[\theta_1, \theta_2]$  باشد نشان دهید  $(y_1, y_n)$  یک آماره بسنده توام کامل برای  $(\theta_1, \theta_2)$  می‌باشد.

$$f(x; \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} I_{(0, \infty)}^{(x)} \quad \text{فرض کنید } x_1, \dots, x_n \sim_{\theta > 0}^{iid} f(x; \theta) \text{ باشد که در آن}$$

الف. کران پائین کرامر راثو را برای برآوردهای ناریب  $\frac{1}{\theta}$  بیابید.ب. در صورت وجود  $UMVUE$  را برای  $\frac{1}{\theta}$  بیابید.