

نام درس: روشهای چند متغیره پیوسته

رشته تحصیلی و کد درس: آمار

۱۱۱۷۰۴۹

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه

آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

امام علی<sup>(ع)</sup>: برتری مردم به یکدیگر، به دانشها و خردهاست؛ نه به ثروتها و تبارها.

۱. اگر  $\underline{X} = (X_1, X_2)$ ،  $y_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$ ،  $y_2 = \frac{X_1 - X_2}{2}$  آنگاه قدر مطلق ژاکوبی تبدیل چقدر است؟

- الف.  $\frac{1}{2}$       ب. ۱      ج. ۲      د. صفر

۲. فرض کنید  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیعی با بردار میانگین  $\mu$  و ماتریس کوواریانس  $\Sigma$  باشد، آنگاه برای ماتریس

کوواریانس نمونه‌ای  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})'$  داریم:

- الف.  $E(S_n) = \frac{9}{10} \Sigma$       ب.  $E(S_n) = \frac{10}{9} \Sigma$       ج.  $E(S_n) = \Sigma$       د. باید توزیع نمونه‌ای معلوم باشد.

۳. مقدار امید ریاضی  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i X_i'$  کدام است؟

- الف.  $\Sigma + \mu\mu'$       ب.  $\Sigma - \mu\mu'$       ج.  $\Sigma - \frac{1}{n} \mu\mu'$       د.  $\Sigma + \frac{1}{n} \mu\mu'$

۴. تحت مدل کوواریانس  $\Sigma = \sigma^2 [(1-\rho)I_p + \rho LL']$  و ماتریس کوواریانس نمونه‌ای زیر برآورد  $ML$  برای  $\rho$  کدام گزینه است؟

$$S = \begin{bmatrix} 7/82 & 7/93 & 7/98 \\ & 9/38 & 8/87 \\ & & 9/79 \end{bmatrix}$$

- الف. ۰/۱۹۸      ب. ۰/۹۲۸      ج. ۰/۹۲۱      د. ۰/۹۱۸

۵. اگر  $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$  باشد که در آن  $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$  کدام یک از گزینه‌های نادرست است؟

- الف.  $X_1, X_3$  مستقلند      ب.  $X_2, X_3$  نامستقلند.  
ج.  $(X_1, X_2)$  با  $X_3$  مستقل نیست      د.  $X_1$  با  $(X_2, X_3)$  مستقل است.

۶. اگر  $X \sim N_p\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\right)$ ، مقدار  $\text{var}(X_1 X_2)$  کدام است؟

- الف. ۴۷      ب. ۳۳      ج. ۹      د. ۳/۳

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: روشهای چند متغیره پیوسته

رشته تحصیلی و کد درس: آمار

۱۱۱۷۰۴۹

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

۷. کدام گزینه نادرست است؟

الف. اگر  $X \sim N_p(\mu, \sigma^2 I_p)$  آنگاه  $\frac{X'X}{\sigma^2}$  دارای توزیع کی دو با  $P$  درجه آزادی است.ب. اگر  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای  $n$  تایی از  $N_p(\mu, \Sigma)$  باشد آنگاه  $S(n-1)$  دارای توزیع و یشارت با  $(n-1)$  درجه آزادی است.ج. اگر  $X_1, \dots, X_n$  نمونه‌ای  $n$  تایی از  $N_p(\mu, \Sigma)$  باشد آنگاه با فرض معلوم بودن  $\mu$  می‌توان گفت  $n\Sigma$  دارای توزیع و یشارت با  $n$  درجه آزادی است.د.  $X \sim N_n(\mu, I_n)$  باشد آنگاه  $\Sigma(X_i - \bar{X})^2$  دارای توزیع کی دو با  $(n-1)$  درجه آزادی است.۸. اگر  $X \sim N_p(\mu, I_p)$  و  $A^p = A$  و رتبه  $A$  برابر ۲ باشد توزیع  $\frac{X'(I-A)X}{X'AX}$  کدام است؟الف. و یشارت ب.  $t$  ج.  $F$  د. کی دو۹. تحت مدل کوواریانس بین طبقه‌ای برآورد درستی ماکزیم  $\sigma^2$  با ماتریس کوواریانس نمونه‌ای زیر کدام است؟

$$S = \begin{bmatrix} 7/82 & 7/93 & 7/98 \\ & 9/38 & 8/87 \\ & & 9/79 \end{bmatrix}$$

الف. ۸ ب. ۸/۹۹ ج. ۱۰/۲۴ د. ۶/۵

۱۰. اگر  $\Sigma = 45[0.7I_6 + 0.3LL']$  باشد مقدار  $\rho_{12,3456}$  کدام است؟الف.  $\frac{0.7}{\sqrt{1.49}}$  ب.  $\frac{1}{1.7}$  ج.  $\frac{0.7}{5.2}$  د.  $\frac{0.7}{3.8}$ ۱۱. اگر  $\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$  آنگاه  $\rho_{1,2,3}^2$  را حساب کنید.الف.  $\frac{38}{23}$  ب.  $\frac{4\sqrt{2}}{23}$  ج.  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  د.  $\frac{4}{23}$ 

۱۲. اندازه وابستگی دو مجموعه از متغیرهای تصادفی ..... است.

الف. همبستگی جزئی ب. همبستگی متعارف ج. همبستگی ساده د. همبستگی چندگانه

نام درس: روشهای چند متغیره پیوسته

رشته تحصیلی و کد درس: آمار

۱۱۱۷۰۴۹

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب

مجاز است.

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

۱۳. فرض کنید  $X' = (X_1, X_2, X_3) \sim N_3(\mu, \Sigma)$  اگر  $\Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$  و  $\text{var}(X_3) = 4$  و  $\mu_{X_1|X_3} = \begin{pmatrix} \frac{X_3}{X_3 - 2} \\ \frac{X_3 - 2}{8} \end{pmatrix}$

باشد که در آن  $X_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$  ،  $\Sigma_{1,2}$  کدام است؟

الف.  $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} \frac{6}{8} & 23 \\ 4 & 111 \\ 23 & \frac{111}{2} \end{pmatrix}$  ب.  $\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 12 & 46 \\ 46 & 111 \end{pmatrix}$  ج.  $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 23 \\ 23 & 222 \end{pmatrix}$  د.  $\frac{1}{16} \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 23 & 111 \end{pmatrix}$

۱۴. اگر بردار تصادفی  $\underline{X}$  دارای ماتریس کوواریانس  $\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  باشد انحراف معیار اولین مؤلفه اصلی کدام است؟

الف.  $2/24$  ب.  $5/55$  ج.  $1/73$  د.  $3$

۱۵. اگر  $\Sigma = 1/2[(1-36)I_3 + 36LL']$  اولین مؤلفه اصلی  $X$  کدام است؟

الف.  $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 - X_2 + X_3)$  ب.  $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{4}}(X_1 + X_2 - X_3)$   
ج.  $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{4}}(X_1 + X_2 + X_3)$  د.  $Z_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X_1 + X_2 + X_3)$

۱۶. در روش رده‌بندی، احتمال رده‌بندی غلط یک فرد جمعیت  $\pi_1$  در  $\pi_2$  برابر است با:

الف.  $P(L(X_0) < K | X_0 \in \pi_2)$  ب.  $P(L(X_0) > K | X_0 \in \pi_2)$   
ج.  $P(L(X_0) > K | X_0 \in \pi_1)$  د.  $P(L(X_0) < K | X_0 \in \pi_1)$

۱۷. بر اساس خواص مجانبی آماره  $f$  و  $m$  و  $U_p$ ، هرگاه  $f \rightarrow \infty$ ، متغیر تصادفی  $U_{p,m,f}$   $-[f - \frac{1}{p}(p-m+1)] \ln U_{p,m,f}$  با

کدام یک از گزینه‌های زیر هم‌توزیع است؟

الف.  $\chi^2_{m+p-1}$  ب.  $F_{pP, p(F-p+1)}$  ج.  $\chi^2_{pm}$  د.  $F_{pm, p(f-1)}$

۱۸. در روش تحلیل ساختار طرح بلوکی تصادفی مجموع درجه‌های آزادی بین  $p$  جمعیت و خطا کدام است؟

الف.  $n(p-1)$  ب.  $np-1$  ج.  $p(n-1)$  د.  $np+n$

۱۹. اگر  $A$  مربعی باشد و  $E(X) = 0$  مقدار  $E(X'AX)$  را بیابید.

الف.  $\text{tr}(A\Sigma - A)$  ب.  $\text{tr}(A\Sigma)$  ج.  $\text{tr}(A\Sigma A')$  د.  $\text{tr}(A\Sigma + A)$

تعداد سؤالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵  
زمان آزمون: تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰ دقیقه  
آزمون نمره منفی دارد ○ ندارد ⊗

نام درس: روشهای چند متغیره پیوسته

رشته تحصیلی و کد درس: آمار

۱۱۱۷۰۴۹

کد سری سؤال: یک (۱)

استفاده از ماشین حساب مجاز است.

۲۰. اگر  $X' = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ ,  $\underline{X}_2 = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_4 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix}$  به طوریکه ماتریس کوواریانس شرطی برابر با

$$\Sigma_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{19}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{pmatrix} \text{ باشد مقدار عبارت } \text{var}(X_1 + X_3 + 1 | X_2 = X_4 = 0) \text{ کدام است؟}$$

- الف. ۱۰      ب.  $\frac{19}{3}$       ج.  $\frac{45}{6}$       د. صفر

## سؤالات تشریحی

هر سوال ۱/۴ نمره دارد

۱. فرض کنید  $X \sim N_3(\mu, \Sigma)$  با  $\mu = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  و  $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$  باشد. بردار  $a$  را به گونه‌ای بیابید که  $X_2$  از

$$a' \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} \text{ مستقل باشد.}$$

۲. نشان دهید در حالت  $P = 3$ 

$$\rho_{1,2,3} = \frac{\rho_{12} - \rho_{13}\rho_{23}}{\sqrt{(1 - \rho_{13}^2)(1 - \rho_{23}^2)}}$$

۳. بر اساس یک نمونه تصادفی  $n$  تایی از  $N_4(\mu, \Sigma)$  می‌خواهیم آزمون فرض  $\begin{cases} H_0: \mu_1 = \mu_2 + \mu_3 \\ H_1: \mu_4 = \mu_3 + \mu_1 \end{cases}$  را در سطح  $\alpha$  انجام

دهیم. آماره آزمون و توزیع آن را مشخص کنید.

۴. در بحث رده‌بندی ممیزی نشان دهید  $E_1 = P(X_0 \in \pi_1 | X \text{ رابه } \pi_2 \text{ رده بندی کنیم}) = \phi(-\frac{\Delta}{\mu})$  که  $\phi(\cdot)$  تابع

توزیع نرمال استاندارد است) و  $\Delta = (\mu_1 - \mu_2)' \Sigma^{-1} (\mu_1 - \mu_2)$  است.

۵. ثابت کنید اگر  $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$  و  $\Sigma > 0$  آنگاه  $X'AX$  دارای توزیع کی‌دو نامرکزی با  $r$  درجه آزادی و پارامتر

نامرکزی  $\mu'A\mu$  است اگر و تنها اگر  $\text{rank}(A\Sigma) = \text{tr}(A\Sigma) = r$  و  $A\Sigma$  خود توان باشد.